华侨大学2009年硕士研究生入学考试专业课试卷

（答案必须写在答题纸上）

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数（B卷） 科目代码 827

1. （20 分）证明：已知 F，F_1 为数域，且 $F \subset F_1$，$f(x), g(x) \in F[x]$. 则 $f(x), g(x)$ 在多项式环 $F[x]$ 中互素当且仅当 $f(x), g(x)$ 在多项式环 $F_1[x]$ 中互素.

2. （20 分）在 4 维欧氏空间 R^4 中，求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间的正交补空间的一个标准正交基.

3. （20 分）设 λ_1, λ_2 是线性变换 σ 的两个不同的特征值，$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别是线性变换 σ 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量，证明：$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 σ 的特征向量.

4. （15 分）证明：设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 仅在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时为 0，则 f 必是正定的或负定的二次型.

5. （15 分）证明：设 A 为 n 阶实对称矩阵，$k \geq 2$ 为正整数，$A^k = 0$，则 $A = 0$.

6. （20 分）设 A 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换，满足 $(A\alpha, \beta) = -(\alpha, A\beta), \forall \alpha, \beta \in V$，证明：

   1) 若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\lambda = 0$；

   2) V 内存在标准正交基，使 A^2 在此基下的矩阵为对角阵.

7. （20 分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，证明：

   1) 如果 $\gamma \in V$ 使 $(\gamma, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \cdots n$，那么 $\gamma = 0$；

   2) 如果 γ_1，$\gamma_2 \in V$ 使对任意 $\alpha \in V$ 有 $(\gamma_1, \alpha) = (\gamma_2, \alpha)$，那么 $\gamma_1 = \gamma_2$.

8. （20 分）设 A 是欧氏空间 V 的一个正交变换，证明：A 的不变子空间的正交补空间也是不变子空间.