

华侨大学 2010 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析 (A)

科目代码 725

一、求下列极限 (共 18 分, 每小题 6 分)

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+6} \right)^{\frac{x-1}{2}};$

2、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cos \sqrt{x} \right)^{\frac{3}{x}};$

3、已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x) + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}.$

二、已知 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, n = 1, 2, \dots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限。 (12 分)

三、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导 ($0 \leq a < b$), 且 $f(a) \neq f(b)$,

证明: 存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$ (11 分)

四、设函数 $f(x)$ 连续, $f(1) = 1$, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值。 (10 分)

五、证明闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套, 则在实数系中存在唯一的一点 ξ ,

使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ 。 (10 分)

六、计算下列积分 (共 16 分, 第 1 小题 7 分, 第 2 小题 9 分)

1、 $\int \frac{2dx}{x + \sqrt{1-x^2}};$

2、 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)dx, (a > 0).$

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析 (A)

科目代码 725

七、若含参量积分在参数 λ 的已知值 λ_0 的某邻域内一致收敛, 则称此积分在 λ_0 一致收敛。

证明: 含参量积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2}$ 在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛。 (11 分)

八、判别函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ 在任何有限区间 I 上是否一致收敛? 在任一点 x_0 处

是否绝对收敛? (12 分)

九、计算 $I = \int_L [-2xe^{-x^2} \sin y]dx + [e^{-x^2} \cos y + x^4]dy$, 其中 L 是从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的

半圆弧 $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1]$ 。 (13 分)

十、证明方程组 $\begin{cases} x^2 + u^2 + v^2 = 9 \\ x^2 + u^2 - 3x = 0 \end{cases}$ ($u, v \neq 0$) 能确定唯一的隐函数组 $u = f(x), v = g(x)$,

并求其导数 $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ 。 (11 分)

十一、计算

$$\iint_S (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy,$$

其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。 (14 分)

十二、证明: 光滑曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上到原点距离最近的点的法线必通过原点。 (12 分)