

# 华侨大学 2012 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数 (A)

科目代码 825

## 一、(本题满分 15 分)

设多项式  $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ ,  $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ . 求  $f(x)$  与  $g(x)$  的最大公因式  $(f(x), g(x))$ .

## 二、(本题满分 15 分)

设行列式  $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ ,  $D$  的第  $i$  行第  $j$  列元素的余子式和代数余子式分别

记为  $M_{ij}$  和  $A_{ij}$ . 求

(1)  $A_{11} + A_{12} + 5A_{14}$ ; (2)  $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$ .

## 三、(本题满分 20 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求正交矩阵  $P$  和对角矩阵  $B$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

## 四、(本题满分 20 分)

证明: 秩为  $r$  的矩阵总可以表成  $r$  个秩为 1 的矩阵之和.

## 五、(本题满分 20 分)

设  $A, B$  都是  $m \times n$  矩阵. 证明: 齐次线性方程组  $AX = 0$  与  $BX = 0$  同解的充分必要条件是存在  $m$  阶可逆阵  $P$  使得  $B = PA$ .

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数(A) 科目代码 825

六、(本题满分 20 分)

设  $W$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个非零子空间, 而对于  $W$  的每一个向量  $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  来说, 或者  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , 或者每一个  $a_i$  都不等于零. 证明:  $\dim W = 1$ .

七、(本题满分 20 分)

设  $A$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  阶方阵, 在  $\mathbb{R}^n$  上定义实数:

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T A \beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

证明:  $\mathbb{R}^n$  关于以上运算构成一个欧氏空间的充分必要条件是  $A$  是正定矩阵.

八、(本题满分 20 分)

设  $\sigma$  是数域  $F$  上  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换.

证明: (1) 存在正整数  $r$ , 使得  $\operatorname{Im} \sigma^r = \operatorname{Im} \sigma^{r+1} = \operatorname{Im} \sigma^{r+2} = \dots$ ;

(2) 存在正整数  $s$ , 使得  $\ker \sigma^s = \ker \sigma^{s+1} = \ker \sigma^{s+2} = \dots$ ;

(3) 存在正整数  $m$ , 使得  $V = \operatorname{Im} \sigma^m \oplus \ker \sigma^m$ .