安徽工业大学 2008 年招收攻读硕士学位研究生专业基础课试卷

科目：数学分析　　　　　　　　　　　　　　代码：711

一、（25 分）选择题（每小题有四个选项，将正确的选项写在答题卷上）。

1、$P_0(x_0，f(x_0))$ 是曲线 L：$y=f(x)$，$x\in(a，b)$ 的点，且 $f'(x_0)=\cdots=f^{(2k)}(x_0)=0$，$f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$，则（　　　）。

A、x_0 是 $y=f(x)$ 的极小值点；　　　B、x_0 是 $y=f(x)$ 的极大值点；

C、$P_0(x_0，f(x_0))$ 是曲线 L 的拐点；D、$P_0(x_0，f(x_0))$ 是曲线 L'：$y=f'(x)$，$x\in(a，b)$ 的拐点。

2、若 $f(x)$ 在 x_0 处存在左导数和右导数，则（　　　）。

A、$f(x)$ 在 x_0 处可导；　　　　B、$f(x)$ 在 x_0 处连续；

C、x_0 是 $f(x)$ 的第一类不连续点；D、x_0 是 $f(x)$ 的第二类不连续点。

3、若 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上有界，且 $f(x)$ 的所有不连续点构成的集合为 E，则（　　）是 $f(x)$ 在闭区间 $[a，b]$ 上可积的充要条件。

A、$E=\Phi$；　　　　B、E 是有限集合；C、E 是无限集合，但有有限个聚点；

D、$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 开区间列 $\{I_n\}$，开区间 I_n 的长为 l_n，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} l_n<\varepsilon$ 及 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\supset E$。

4、若 $f_n(x)$ 在 $[a，b]$ 上可积，$n=1，2，\cdots$；则 $f_n(x)$ 在 $[a，b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a，b]$ 上可积，且 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ 的（　　）。

A、必要条件；　　　　　B、充分条件；

C、充分必要条件；　　　D、既非充分，也非必要条件。

5、若（　　　），则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

A、$a_n=o(\frac{1}{n})$；　　　　B、$a_n\geq 0$，且 $a_n=o(\frac{1}{n})$；

C、$a_n=O(\frac{1}{n^{1+\alpha}})$，$\alpha>0$；　　D、$a_n\geq 0$，且 $a_n=O(\frac{1}{n^{\alpha}})$，$\alpha>0$。

二、（25 分）简答题（每小题 5 分，解答写在答题卷上，注明题号）。

1、叙述 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $(a，b)$ 内一致收敛的 Cauchy 准则。

2、若 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 G 内有一阶连续偏导数，写出 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在原函数的条件。

3、写出 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径计算公式及其在收敛区间内的收敛特点。

4、若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可积，且以 $2l$ 为周期，写出 $f(x)$ 的 Fourier 系数及 Fourier 级数的收敛定理。

5、判断命题"若 $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$"的真伪；若是真命题，则给出证明；若是伪命题，请举出反例。

三、(50 分)(每小题 10 分，解答写在答题卷上，注明题号)

1、计算 $\int|x-1|dx$。

2、求出 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$。

3、求 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧。

4、求无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx$，($a>0$，$b>0$)。

5、$f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=p$，(p 为实数)，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

四、(15 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^3-y^3} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的连续性。

五、(15 分) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增，且连续可微，证明，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx。$$

六、(20 分) 设 $f_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，k=1，2，…，n；证明：

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n\left(\int_a^b f_k(x)dx\right)^2}\leqslant\int_a^b\left(\sqrt{\sum_{k=1}^n\left(f_k(x)\right)^2}\right)dx.$$