安徽工业大学2008年招收攻读硕士学位研究生专业基础课试卷（A）

科目名称：高等代数　　　　代码：811

一、判断分析题，判断下列说法是否正确，**并给出说明**!（每小题5分）

1) 若 d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),则 d(x)是 f(x)和 g(x)的最大公因式。
2) 若 a 为 f′（x）的 m 重根，则 a 为 f(x)的 m+1 重根。
3) 设 A 为 n（n>2）阶方阵，若|A|=0，则 A 中有两行或者两列对应成比例。
4) 如果 n（n>2）阶方阵 A 的秩严格小于 n-1，则 A 的伴随矩阵 A*=0。

5）两个同型矩阵等价的充要条件是它们的秩相同。

6）分量满足 $x_1+x_2+x_3+...+x_n=0$ 的 n 维向量的全体构成线性空间。

7）线性变换 T 是单射当且仅当 T 的核为零空间。

8）设 $A=(a_{ij})_{n\times n},B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是实空间 $R^{n\times n}$ 中的任意矩阵，$R^{n\times n}$ 对定义

$(A,B)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}b_{ii}$ 构成欧氏空间。

二、计算证明题（15 分）

1、证明：多项式 x^3-3 在有理数域上不可约；

2、求 u(x), v(x)，使得 $u(x)(x^2+x)+v(x)(x^3-3)=1$；

3、利用上题结论求 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$（结果表示成 $a+b\sqrt[3]{3}+c\sqrt[3]{9},a,b,c$ 为有理数）

三、计算下列 n 级行列式（10 分）：

$$1、D_n=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}\quad (a\neq b)$$

2、$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$

四、（15 分）设 A、B 分别是$n\times m, m\times n$矩阵，矩阵$T=\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix}$，

1、计算$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -A & E_n \end{pmatrix}T$，$\begin{pmatrix} E_m & -B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}T$；

2、证明：$\left|E_n - AB\right| = \left|E_m - BA\right|$；

3、利用上题结论计算行列式$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$

五、（15 分）讨论当 a,b 取何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=2 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ 2x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$有唯一解、无解、有无穷多解，当有无穷多解时，求出其通解。

六、（15 分）$\alpha_1=(1,2,1,0)^T, \alpha_2=(-1,1,1,1)^T, \beta_1=(2,-1,0,1)^T, \beta_2=(1,-1,3,7)^T$

求$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2); L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$的一组基及维数。

七、（10 分）设 A、B 均为 n 阶实对称矩阵，证明:

（1）、当实数 t 充分大之后，tE+A 是正定矩阵；

（2）、若 A、B 均正定，且 AB=BA，则 AB 也是正定矩阵.

八、（10 分）设 T 是有限维线性空间 V 的线性变换，$T^2=T$，证明：

$V=T(V)\oplus T^{-1}(0)$，其中$T(V), T^{-1}(0)$分别表示 T 的值域与核。

九、（10 分） 求复矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$的不变因子，初等因子及若当标准形。

十、（10 分） 设有矛盾方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ -x+y=-4 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$ ，用“到子空间距离最短的线段是垂线”的语言表达出上面方程的最小二乘解的几何意义，由此列出方程并求其最小二乘解。