中国科学院——中国科学技术大学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：高等数学丁 (A)

一、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，$f(0)=1$，又

$$g(x)=\begin{cases}\mathrm{arctg} f(x), & x>0\\ ae^{x^2}, & x\le 0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，求 a 和 $f'(0)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{arctg} f(x)=a\cdot e^0=a=\frac{\pi}{4}$

$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+f^2(x)}f'(x) & x>0\\ a\cdot 2x\cdot e^{x^2} & x\le 0\end{cases}$

$g'(0^+)=g'(0^-)$ $\frac{1}{2}f'(0)=0$ $f'(0)=0$

二、(10 分) $y'=x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1) $y=xe^{\frac{1}{x}}$，求 y'. (4 分)

2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=k^2\\ ax+by+cz=d,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$. (6 分)

$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\\ a+b\frac{dy}{dx}+c\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{az-xc}{yc-bz}$

三、(10 分)

1) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin x}$. $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-1}{\sin x\left[(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}+1\right]}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{3\sin x}=\frac{1}{3}$

2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin x+x^3\sin\frac{1}{x}}{x^3}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}+1=1$

四、(10 分) 设 $\sin x^2$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 求 $\frac{d}{dx}f(x)$ 和 $\frac{d}{dx}f(\sqrt{x})$.

$f(x)=(\sin x^2)'=2x\cos x^2$

$\frac{d}{dx}f(x)=2\cos x^2-4x^2\sin x^2$

$\frac{d}{dx}f(\sqrt{x})=\frac{d}{dx}f(x)\cdot(\sqrt{x})'$

$=\frac{1}{\sqrt{x}}(\cos x^2-2x^2\sin x^2)$

五、(20 分) 求积分

$=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

1) $\int\frac{2dx}{(1+x^2)(1-x^2)}$; $=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx=\int\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}\right]dx$

2) $\int\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx$; $=\mathrm{tg}x\ln\sin x-\int\mathrm{tg}x\frac{\cos x}{\sin x}dx+C=\mathrm{tg}x\cdot\ln\sin x-x+C$

3) $\int_0^1(x\sin x+xe^{x^2})dx$; $\int_0^1 x\sin x dx=x(-\cos x)\Big|_0^1-\int_0^1(-\cos x)dx=\sin1-\cos1$, $\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$

$I=\sin1-\cos1+\frac{1}{2}(e-1)$

4) $\int_0^1 xf(x)dx$, 其中 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$. $\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$

$f'(x)=e^{-x^4}\cdot2x$

六、(10 分) 设直线 l 是 $y=\sqrt{x}$ 在 $(1,1)$ 处的切线，求由直线 l, oy 轴及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形的面积.

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $k=\frac{1}{2}$ l: $y=\frac{1}{2}(x+1)$

$S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(x+1)-\sqrt{x}\right]dx=\frac{1}{12}$

七、(10 分) 设 $\int_0^x f(t)dt=5f(x)+5x^2$. 求 $f(x)$.

八、(10 分) 求 $\iint_D(x+y)dxdy$, 其中 D 由 $y=x, y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=-x$ 围成.

九、(10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n-1)x^n$ 的收敛区间及其和函数.

七. $f(x)=5f'(x)+10x$, $f(0)=0$

设 $y=f(x)$ 则 $y'-\frac{1}{5}y=-2x$

$y=e^{-\int-\frac{1}{5}dx}\left(\int e^{\int-\frac{1}{5}dx}(-2x)dx+C\right)$

$f(x)=10x+50-50e^{\frac{x}{5}}$

八. $\iint(x+y)dxdy$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1(r\cos\theta+r\sin\theta)rdr$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}$

九. $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{2}{2n-1}=1$

$R=\frac{1}{\rho}=1$ $(-1,1)$ 1和-1处都发散

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n-1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^n-3x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

$=2\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{3}{1-x}$

$=2\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{3}{1-x}$

$=\frac{3x-1}{(1-x)^2}$