



试题名称:

高等数学 (B)

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分, 把答案填在答题纸上)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1}) = (1).$

2. $\int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = (2).$ $2(1 - \ln 3 + \ln 2) = 2 - 2\ln \frac{3}{2}$

3. 设 $z = f(x, y) = x^2 e^y + 2xy^3 + e^x y$. 则 $f'_x(1, 0) + f'_y(1, 0) = (3 + e)$

4. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ 的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$

5. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解为 $(y = \pm \sqrt{2C - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C)$

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分, 每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的, 把所选项前的字母填在答题纸上)

1. 设 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 则 x_0 是 $f(x)$ 的

(A) 驻点 (B) 拐点 (C) 间断点 (D) 可导点

2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 为 $\frac{1}{x}$ 的

(A) 3 阶无穷小 (B) 2 阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 等价无穷小

3. 下列哪个点在平面 $2x + 5y = 0$

(A) (3, 0, 3) (B) (0, 3, 0) (C) (5, -2, 0) (D) (5, 2, 1)

4. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy =$

(A) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$

(D) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 是收敛的, 则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛 (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

三、(本题 10 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \int_1^x \frac{1}{\ln t} dt}{x}$.

四、(本题 10 分) 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n})$

五、(本题 10 分) 计算定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$.

六、(本题 10 分) 证明: 若 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上可导, 且满足关系式 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$, 则在开区间 $(0,1)$ 内存在一点 c 使得 $f(c) + cf'(c) = 0$.

七、(本题 11 分) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $x^2 + y^2 = 2y$ 所确定的区域.

八、(本题 11 分) 某单位要建造一个容积为 A 的圆柱形蓄水池. 设底所用材料的单位面积的造价是侧面所用材料单位造价的两倍. 问底半径与高成怎样的比例才能使蓄水池的造价最低.

九、(本题 12 分, 每小题 6 分)

1. 求过曲面 $\pi: 9x^2 + 16y^2 - 25z^2 = 1$ 上点 $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ 处的切平面方程.

2. 求过点 M 且平行于 $3x + 4y + 5z + 8 = 0$ 的平面与曲面 π 的交线 L 在点 M 处的单位切向量.

十、(本题 10 分) 在曲线 $C: \begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 上求一点 M 使其 z 坐标最小.

十一、(本题 11 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.

十二、(本题 10 分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的和函数

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称: 高等数学 (B)

一、 1. 1; 2. $2 + 2 \ln \frac{2}{3}$; 3. $3 + e$;

4. $(-\infty, +\infty)$; 5. $x^2 + y^2 = c^2$ (c 为任意常数)

二、 1. D; 2. B; 3. C; 4. D; 5. A

三、这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. (1 分)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt + \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) \quad (6 \text{ 分})$$
$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 1 + 0 = 1. \quad (10 \text{ 分})$$

四、利用函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的可积性. (2 分)

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}) = \frac{1}{n} (\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

五、令 $x = \sin t$. 则 $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t}$. (5 分) 再令 $t = \pi/2 - u$. 由于

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u du}{\cos u + \sin u}. \quad (8 \text{ 分}) \quad \text{所以原积分} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}. \quad (10 \text{ 分})$$

六、令 $F(x) = xf(x)$. (1 分) 则由积分中值定理知存在一点 $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ 使得

$$F(1) = f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = 2\xi f(\xi) \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \xi f(\xi). \quad (6 \text{ 分})$$

由于 $F(x)$ 在闭区间 $[\xi, 1]$ 上连续, 在开区间 $(\xi, 1)$ 上可导, 且 $F(\xi) = \xi f(\xi) = F(1)$, 所以由 Rolle 定理知, 在开区间 $(\xi, 1) \subset (0, 1)$ 内存在一点 c 使得 $F'(c) = f(c) + cf'(c) = 0$. (10 分)

七、 $x^2 + y^2 = 2y$ 的极坐标方程为 $r = 2 \sin \theta$. (4 分) 所以 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 dr$

$$= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{9}. \quad (11 \text{ 分})$$

八、设底半径为 r , 高为 h , 总造价为 y . 设侧面的单位面积造价为 k , 则底面的单位面积造价是 $2k$. 由题意有 $A = \pi r^2 h$, 由此得 $h = \frac{A}{\pi r^2}$. $y = 2\pi r h k + 2\pi r^2 k = 2k \left(\frac{A}{r} + \pi r^2 \right)$. (6 分)

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

由于 $y'(r) = 2k(-\frac{A}{r^2} + 2\pi r)$, $y''(r) = 2k(\frac{2A}{r^3} + 2\pi) > 0$, 所以 $y(r)$ 在驻点处达最大值. (9 分)

令 $y' = 0$ 得驻点 $r_0 = \sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}}$. 于是, $\frac{r_0}{h} = \frac{r_0^3}{A} = \frac{1}{2}$. (11 分)

九、1. π 在 M 处的切平面法向量为 $(6, 8, -10)$, 切平面方程为 $3x + 4y - 5z = 1$. (5 分)

2. 所求平面 P 与 $3x + 4y + 5z + 8 = 0$ 平行, 其法向量为 $(3, 4, 5)$, 得 P 的方程为

$$3(x - \frac{1}{3}) + 4(y - \frac{1}{4}) + 5(z - \frac{1}{5}) = 0, \text{ 即 } 3x + 4y + 5z = 3. \quad (10 \text{ 分})$$

交线 L 的切向量为 $(3, 4, 5) \times (3, 4, -5) = (-40, 30, 0)$, 切向量为 $\pm(-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 0)$. (12 分)

十、(此题可以化为无条件极值来解) 求 $z = x^2 + 2y^2$ 在约束条件 $x + y = 1$ 下的最小值. (2 分)

用 Lagrange 乘数法. 令 $F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 1)$. (2 分)

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{4} \\ \lambda = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ 由此得驻点 } (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}). \quad (8 \text{ 分})$$

由实际问题知最小值是存在的, 而且在驻点达到, 即 $z = \frac{2}{3}$. 所求的点 $M = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. (10 分)

十一、由特征方程, 得齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. (5 分) 令该方程的特解为

$$y^* = v(x)e^x + u(x)e^{2x}. \quad (6 \text{ 分}) \quad \text{代入方程便得到 } \begin{cases} v' + e^x u' = 0 \\ v' + 2e^x u' = x \end{cases} \text{ 解之得 } v' = -x, \quad u' = xe^{-x},$$

即 $v = -\frac{1}{2}x^2$, $u = -(x+1)e^{-x}$. 于是, $y^* = -(\frac{1}{2}x^2 + x + 1)e^x$. (10 分) 因此, 该方程

的通解为 $y = -(\frac{1}{2}x^2 + x + 1)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. (11 分)

十二、因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n+1)! |x|^n} = |x|$, 所以当 $|x| < 1$ 时, 该级数收敛. (4 分) 注意到当 $x = 1$ 和 -1

时, 对应的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n$ 都发散, 所以收敛域为 $(-1, 1)$. (6 分)

$$\begin{aligned} \text{令 } S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n. \text{ 则 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 2x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt \right) + \frac{1}{1-x} \\ &= 2x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) + \frac{1}{1-x} = 2x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) + \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

(10 分)