中国科学院—中国科学技术大学
2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：高等数学 A

注意：填空、选择题的答案必须答在答题纸上。

一、填空题：（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}=$ ________.

2. 设 $\begin{cases} x=\int_1^{t^2} u\ln u\,du \\ y=\int_{t^2}^{1} u^2\ln u\,du. \end{cases}$ $(t>0)$, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

3. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{1-2x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 ________.

4. 椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程为 ________.

5. 微分方程 $y''-y'-2y=4xe^x$ 的通解为 ________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} |x|^{\alpha}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续但不可导，则 α 的取值范围是

(A) $\alpha>0$　(B) $0<\alpha\le 1$　(C) $0<\alpha<1$　(D) $\alpha>1$

[ ]

2. "对任给 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，就有 $|a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n|<\varepsilon$" 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的

(A) 充分条件但非必要条件　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分条件又非必要条件

[ ]

3. 设 S 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=R$ 之间的部分，则 $\iint_S (x^2+z^2)dS=$

(A) $\frac{8}{3}\pi R^4$　(B) $\frac{5}{3}\pi R^4$　(C) $\frac{4}{3}\pi R^4$　(D) πR^4

[ ]

4. 设 L 是起点为 $A(-1,0)$，终点为 $B(1,0)$ 的简单光滑曲线，除 A,B 外其它点都在 x 轴上方，则曲线积分 $\int_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ 的值

(A) 恒为 $-\pi$ (B) 恒为 0 (C) 恒为 π (D) 与曲线 L 有关

[ ]

5. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 的收敛域为

(A) $p>-1$ (B) $0<p<3$ (C) $-1<p<1$ (D) $-1<p<3$

[ ]

三、(5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 求 $\int \max(x,1)dx$.

2. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^m+1)}dx$, 其中 m 是正整数.

3. 设 $G_n=\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$.

4. 证明：当 $x>0$ 时，有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

5. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导函数，对所有 $x\geq 0$, 有 $|f(x)|\leq e^{-x}$, 且 $f(0)=1$.

证明：存在 $\xi>0$, 使得 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

四、(3 小题，每小题 12 分，满分 36 分)

1. 求函数 $z=x^2y(3-x-y)$ 在闭区域 D：$x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 4$ 上的最大值和最小值.

2. 设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{4}\int_0^{2x}(2x-t)f\left(\frac{t}{2}\right)dt$. 其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

3. 设 $a,b,c>0$, 求曲面 $x^2+y^2+\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2=a^2$ 与 $|z|\leq c$ 所界物体的体积.

五、(2 小题，每小题 12 分，共 24 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leq x\leq 1\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leq\pi\end{cases}$

将 $f(x)$ 展开成周期为 2π 的正弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$.

2. 设区域 V 是由曲面 $2x^2+y^2-z^2=1$ 及平面 $z=1$, 平面 $z=-1$ 所围成，S 为 V 的全表面外侧. 又设 $\vec{v}=(2x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

(1) 求 $\mathrm{div}\,\vec{v}$.

(2) 求积分 $\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(2x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

高等数学A参考答案

①

一、填空题：

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{-1}{2t^2\ln t}$ 3. $(0,2]$

4. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$. 5. $y=-(2x+1)e^{x}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

二、选择题：

1. C 2. C 3. B 4. A 5 D

三、

1. $\max(x,1)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$

故 $\max(x,1)$ 的一个原函数为 $F(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ \frac{x^2}{2}+C_1, & x\ge 1\end{cases}$

由于 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $C_1=\frac{1}{2}$.

于是 $F(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ \frac{x^2+1}{2}, & x\ge 1\end{cases}$

所以，$\int \max(x,1)\,dx = F(x)+C$.

2. $x^m=t$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^m+1)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{x^m(x^m+1)}dx=\frac{1}{m}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)}$$

$$=\frac{1}{m}\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{m}\ln 2$$

3. $$\ln\frac{a_n}{n}=\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$\to\int_0^1\ln(1+x)dx=\int_1^2\ln t\,dt=t\ln t\Big|_1^2-\int_1^2 t\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{4}{e}$.

4. 原式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$

$\Longleftrightarrow$ $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\xLeftrightarrow{\frac{1}{x}=y}$ $\frac{y}{1+y} < \ln(1+y) < y$, $(y>0)$

记 $f(y)=\ln(1+y)-y$, $g(y)=\ln(1+y)-\frac{y}{1+y}$

则 $f(0)=0$, $g(0)=0$.

$f'(y)=\frac{1}{1+y}-1<0$. $g'(y)=\frac{1}{1+y}-\frac{1}{(1+y)^2}=\frac{y}{(1+y)^2}>0$

所以 当 $y>0$ 时, $f(y)<f(0)=0$, $g(y)>g(0)=0$.

5. 记 $F(x)=f(x)-e^{-x}$, 则 $F(0)=0$.

因为 $|f(x)|\leq e^{-x}$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

如果 $F(x)\equiv0$, 显然存在 $\xi>0$, 使 $F'(\xi)=0$.

如果 存在 $x_0>0$, 使得 $F(x_0)>0$, 则 $F(x)$在 $[0,+\infty)$上 必存最大值, 设 $F(\xi)$为最大值, 则 $F'(\xi)=0$.

如果存在 $x_0>0$, 使得 $F(x_0)<0$, 则 $F(x)$在 $[0,+\infty)$上 必存最小值, 设 $F(\xi)$为最小值, 则 $F'(\xi)=0$.

所以, 总存在 $\xi>0$, 使得 $F'(\xi)=0$,

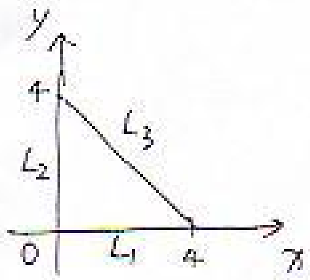
由于 $F'(\xi)=f'(\xi)+e^{-\xi}$, 即 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$.

四.

1. 先求驻点: $\frac{\partial z}{\partial x}=xy(6-3x-2y)=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2(3-x-2y)=0$

解 $\begin{cases}3x+2y=6\\x+2y=3\end{cases}$ 得驻点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$.



如图，在 L_1, L_2 上，$z\equiv 0$.

$z(\frac{3}{2},\frac{3}{4})=\frac{81}{64}$

在 L_3 上，$y=4-x$,

$z=-x^2(4-x)=f(x)$ ，$0\le x\le 4$

$f'(x)=3x^2-8x$，$f(\frac{8}{3})=-\frac{256}{27}$

因为连续函数在有界闭区域必有最大、小值，

所以所求最大值为 $z(\frac{3}{2},\frac{3}{4})=\frac{81}{64}$，

最小值为 $z(\frac{8}{3},\frac{4}{3})=-\frac{256}{27}$.

2. $f(x)=\cos x+\int_0^x (x-u)f(u)\,du$ ，$t=2u$

$=\cos x+x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$，$f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x+\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)$

$=-\sin x+\int_0^x f(u)\,du$ $\qquad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x+f(x)$.

微分方程 $y''-y=-\cos x$ 的特解为 $y^*=a\cos x$.

代入求得 $a=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+Ae^{x}+Be^{-x}$.

由 $f(0)=1$，$f'(0)=0$，可得 $A=B=\frac{1}{4}$.

因此，所求 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})$.

3. $V=\int_{-c}^{c}\left(\iint_{x^2+y^2\le a^2-\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2} dx\,dy\right)dz=2\int_0^c \pi\left(a^2-\frac{a^2-b^2}{c^2}z^2\right)dz$

$=2\pi\left(a^2c-\frac{a^2-b^2}{c^2}\frac{c^3}{3}\right)=\frac{2\pi c}{3}(2a^2+b^2)$

五. 1. $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\frac{\pi-1}{2}x\sin nx\,dx+\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx\right]$ ④

$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-1}{2}\int_0^1 x\,d\frac{\cos nx}{-n}+\int_1^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d\frac{\cos nx}{-n}\right]$

$=\frac{1}{-n\pi}\left[(\pi-1)x\cos nx\Big|_0^1-\int_0^1(\pi-1)\cos nx\,dx+(\pi-x)\cos nx\Big|_1^{\pi}+\int_1^{\pi}\cos nx\,dx\right]$

$=-\frac{1}{n\pi}\left[(\pi-1)\cos n-(\pi-1)\frac{\sin n}{n}-(\pi-1)\cos n-\frac{\sin n}{n}\right]=\frac{\sin n}{n^2}$

所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\quad 0\le x\le\pi.$

令 $x=1$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}=f(1)=\frac{\pi-1}{2}.$

由 Parseval 等式，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)^2\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^1\left(\frac{\pi-1}{2}x\right)^2dx+\int_1^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi-1)^2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{(x-\pi)^3}{12}\Big|_1^{\pi}\right]=\frac{(\pi-1)^2}{6}$

2

(1) $\operatorname{div}\vec{v}=\left(-\frac{3}{2}\right)(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}4x^2+(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\left(-\frac{3}{2}\right)(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y^2$

$+(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\left(-\frac{3}{2}\right)(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z^2+(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$=(2x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\left[-6x^2-3y^2-3z^2+3(2x^2+y^2+z^2)\right]=0.$

(2) 在V内作一小椭球面 S_ε: $2x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$.（外侧）.

则 $\iint\limits_{S}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(2x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\xlongequal[\operatorname{div}\vec{v}=0]{\text{Gauss公式}}\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(2x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_\varepsilon}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy\xlongequal{\text{Gauss公式}}\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{V_\varepsilon}3\,dxdydz$

$=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon=2\sqrt{2}\pi.$