中国科学院－中国科学技术大学
2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称： 普通物理 A

一. (20 分) 滑雪运动员在一倾斜角为 α 的山坡上滑雪，初速度为 v_0，并以与水平线成 θ 角跳出，如图 1 所示，不考虑空气阻力，求运动员落在斜坡上的最大距离。

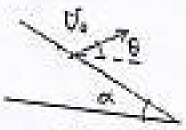


图 1

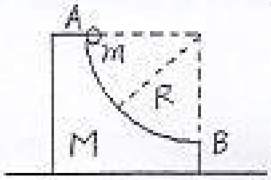


图 2

二. (20 分)一质量为 m 的物体从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下，设圆弧形槽的半径为 R，张角为 $\pi/2$。(如图 2 所示)，如所有摩擦都可忽略。求：

7 6 (1) 物体刚离开槽底端时，物体和槽的速度各为多少；

7 (2) 在物体从 A 滑到 B 的过程中，物体对槽所做的功；

6 (3) 物体到达 B 时对槽的压力。

三. (20 分)一根质量为 m，长为 l 的均匀细棒 OA (如图 3 所示)，可以绕通过其一端的光滑轴 O 在竖直平面内转动。今使棒从水平位置开始自由下摆，求细棒摆到垂直位置时，其中心点 C 和端点 A 的速度。

图 3

四. (15 分) 一均匀带电球壳的面电荷密度为 σ。利用能量守恒定律，求作用在球壳的单位面积上的静电力。

五. (20 分) 如图 5 所示，三根平行直导线 1，2，3 在真空中相距为 a，分别通有电流 I_1，I_2，I_3，导线 1 和导线 2 中电流方向相同。试求每根导线单位长度所受的力。

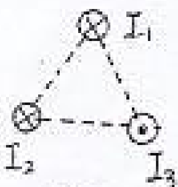


图 5

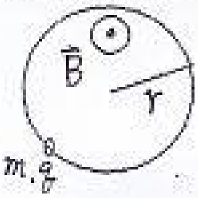


图 6

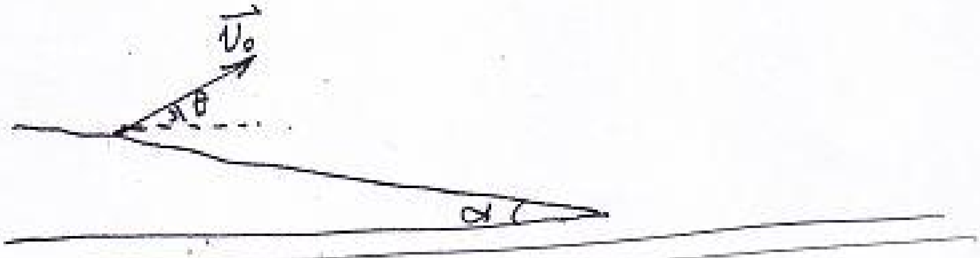
六. 如图 6 所示，质量为 m 的小珠可沿半径为 r 的圆环形轨道运动，环面为水平面。小珠带有固定的正电荷 q。设在以环形轨道的外同心圆环为其正截面的圆柱体内有均匀的随时间 t 变化的磁场，磁感应强度 B 垂直于环面。已知 $t=0$ 时，$B=0$，小珠静止于环上；$0<t<T$ 时，B 随时间线性地增长；$t=T$ 时，$B=B_0$，设重力和摩擦力可忽略。试求：在 $0\geq t\leq T$ 时间内，小珠的运动速度与时间关系及小珠对轨道的作用力。(20分)

七. (20 分) 已知镍原子的基态是 $^3F_4$。(1) 问镍原子束在斯特恩一盖拉赫实验的不均匀横向磁场中将分裂为几束？简述理由。(2) 求基态镍原子的有效磁矩 μ_J (以玻尔磁子 μ_B 为单位)。

15+10

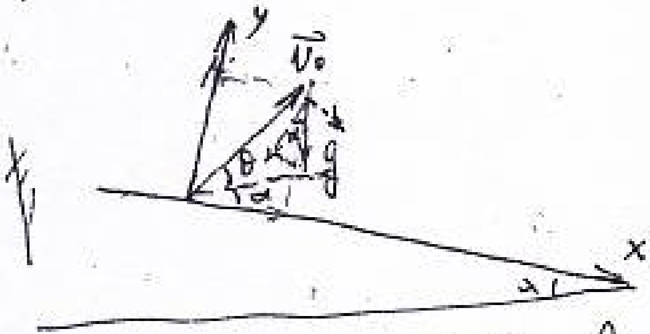
八. (15 分) 在磁感应强度为 0.5 特斯拉的磁场中，钙的 $^1D_2 \to {}^1P_1$ $\lambda = 732.6\,\mathrm{nm}$ 的谱线在垂直于磁场方向观察将分裂成几条谱线？若相邻谱线间距为 0.7×10^{10}Hz, 请计算一下电子的荷质比。

1A 滑雪运动员在一倾斜角为α的山坡道上滑雪，初速为v_0，并以与水平线成θ角跳出，如图所示，不计空气阻力，求运动员落在斜坡上的最大距离。



解：

建立坐标，以起跳点为原点，沿斜面向下为x轴正向，垂直斜面向上为y轴正向的直角坐标系



$\vec{v_0}$与x轴成α+θ角=β

x方向：$v_{0x} = v_0\cos\beta$

$x = v_0\cos\beta\, t + \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$

y方向：$v_{0y} = v_0\sin\beta$ $\cancel{\boxed{t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2}}$

$y = v_0\sin\beta\cdot t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2$

~~第一步~~

当 $y=0$ 时落地

此时 $t_m = \frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\theta}$ α

将t_m代入x的方程 即得落到坡上的最大距离

$$x = \frac{v_0\cos\beta \cdot 2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha} + \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot \frac{4v_0^2\sin^2\beta}{g^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin 2\beta\cos\alpha + 2\sin\alpha\sin^2\beta\right]$$

$$\left(\because \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta \quad \therefore 2\sin^2\beta = 1 - \cos 2\beta\right)$$

$$\therefore x = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin 2\beta\cos\alpha - \cos 2\beta\sin\alpha + \sin\alpha\right]$$

$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left[\sin(2\beta - \alpha) + \sin\alpha\right]$$

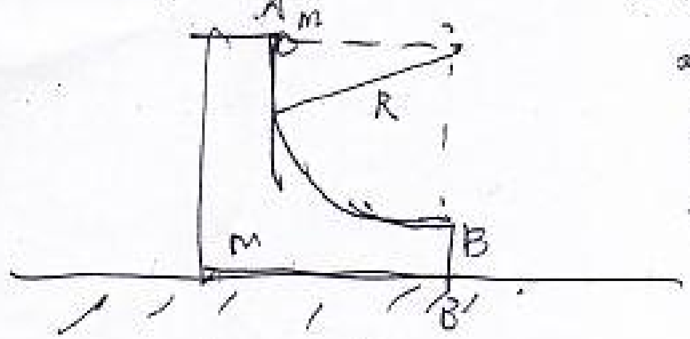
当 $\sin(2\beta - \alpha) = 1$ 时，

即 $2\alpha + 2\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$，$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时

S有最大值. S_{max}

$$\boxed{S_{max} = \frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}}$$

A2 解：



(1) 取物体m和槽M和地球为系统，对地面参考系，设小球离开槽底时小球与槽的速度分别为v和V，由机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad (1)$$

又由水平方向的动量守恒

$$mv + MV = 0 \quad (2)$$

联立二式解得：

$$v = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}, \quad V = -m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}.$$

(2) 对M，由动能定理可得物体所做的功

$$A = \frac{1}{2}MV^2 - 0 = \frac{m^2 gR}{M+m}$$

(3) 当m到达B点瞬时，M可视为以速度V运动的惯性系，以M为参考系，m到达B点时的速度为v'，则由

$$v' = v - V \quad (v'_{相} = v_{绝} - V_{牵})$$

可得

$$v' = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} + m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

$$= \left(1+\frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} = \sqrt{\frac{2(M+m)gR}{M}}$$

由牛顿定律：

$$N - mg = m\frac{v'^2}{R}$$

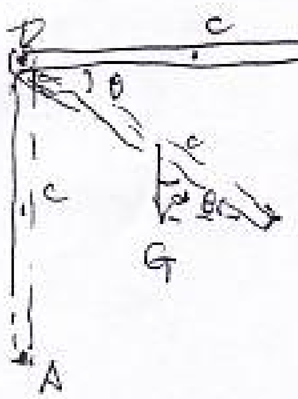
所以

$$N = mg + m\frac{v'^2}{R} = mg + \frac{2(M+m)mg}{M}$$

$$= \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg.$$

(p67)

A3解：重力G作用在棒的中点C，轴对棒的支承力N垂直于棒和轴的接触面且通过O点，在棒的下摆过程中，此力的大小和方向都是随时间改变。



在棒的下摆过程中对轴O而言，支承力N的力矩等于0，重力G的力矩是变力矩。

大小等于 $mg\frac{l}{2}\cos\theta$

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\frac{\vec{l}}{2}\times m\vec{g}$$

$$M=\frac{1}{2}lmg\sin\alpha=\frac{1}{2}mgl\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

棒转过一极小角位移 $d\theta$ 时，

重力矩所作的功 $dA=Md\theta=\frac{1}{2}mgl\cos\theta\, d\theta$

∴棒从水平位置下摆到竖直位置的过程中 重力矩所作的功为

$$A=\int dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}mgl\cos\theta\, d\theta=mg\frac{l}{2}$$

重力矩所作的功实际上是重力作的功，可用重力势能的差值表示。棒在水平位置时的角速度为 $\omega_0=0$，下摆到竖直位置时的角速度为 ω，按动能定理的功和转动动能增量的关系，

$$\boxed{mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2}$$

∴ $\omega=\sqrt{\frac{mgl}{I}}$　　$I=\frac{1}{3}ml^2$

∴ $\omega=\sqrt{3g/l}$

所以细棒在竖直位置时，端点A和中心C的速度分别为 $v_A=\omega l=\sqrt{3gl}$，$v_C=\frac{1}{2}\omega l=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$

普物.（答案）甲型

4. 解、

设带电球壳的电荷不变为 $Q=\sigma S$，$S=4\pi R^2$（R球半径）

系统的能量 $W=\frac{1}{2}\iiint \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\sigma S\frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon_0 R}$

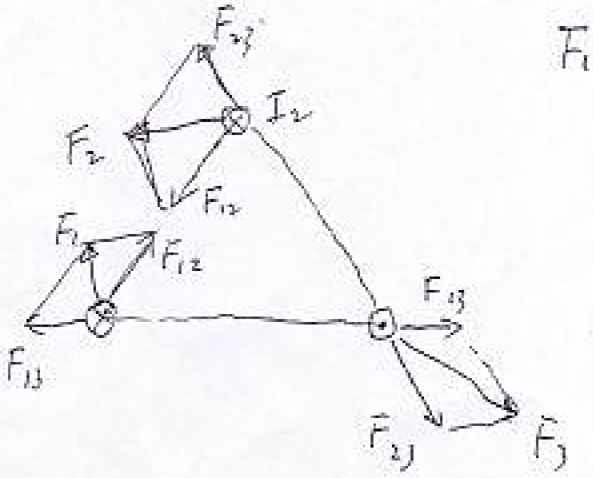
$$=\frac{(\sigma S)^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

总力 $F=-\frac{\partial W}{\partial R}=\frac{(\sigma S)^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{(4\pi R^2)^2\sigma^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$

单位面积受力 $f=\frac{F}{4\pi R^2}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

2. 解. 导线1, 2, 1, 3和2, 3之间单位长度的作用力的大小分别为

$$F_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a},\quad F_{13}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\quad F_{23}=\frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi a}$$



$$F_1=\sqrt{F_{12}^2+F_{13}^2+2F_{12}\cdot F_{13}\cos 120^\circ}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\right)^2 I_2^2+\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\right)^2 I_3^2-\frac{\mu_0^2 I_1^2}{(2\pi a)^2}I_2 I_3}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\sqrt{I_2^2+I_3^2-I_2 I_3}$$

同理：

$$F_2=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\sqrt{I_1^2+I_3^2-I_1 I_3}$$

$$F_3=\frac{\mu_0 I_3}{2\pi a}\sqrt{I_1^2+I_2^2-I_1 I_2}$$

(3) 在 $0 < t \leq T$，　$B(t) = \frac{B_0}{T} t$

圆环上产生涡旋感生电动势.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B\pi r^2) = \frac{B_0 \pi r^2}{T}$$

由对称性，圆环上各点有旋电场（方向沿切向）大小相同. 因此有

$$\varepsilon = E \cdot 2\pi r$$

$$E = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = \frac{B_0 \pi r^2}{2\pi r T} = \frac{B_0 r}{2T}$$

有旋电场力　$\vec{F} = q\vec{E}$.

小球切向加速度.

$$a_t = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q B_0 r}{2mT}$$

切向速度.　$v = a_t t = \frac{q B_0 r}{2mT} t$

小球受洛仑兹力.

$$F_L = qvB = \frac{q^2 B_0^2 r}{2mT^2} t^2$$

设 N 为圆轨道对小球的弹力.

$$F_L - N = \frac{mv^2}{r}$$

$$N = F_L - \frac{mv^2}{r} = \frac{q^2 B_0^2 r t^2}{2mT^2} - \frac{m q^2 B_0^2 r^2 t^2}{r \, 4m^2 T^2}$$

$$= \frac{q^2 B_0^2 r t^2}{4mT^2}$$

$N' = -N$

（小球对轨道力）

普物A原子物理试题（甲型）

1. 已知镍原子的基态是 $^3F_4$。(1) 问镍原子束在斯特恩－盖拉赫实验的不均匀横向磁场中将分裂为几束？简述理由。(2) 求基态镍原子的有效磁矩 μ_J (以玻尔磁子 μ_B 为单位)。

解:

(1) $^3F_4$ 态的有关量子数为　　$L=3$，$S=1$，$J=4$，

$$F=\mu_Z\frac{\partial B_Z}{\partial Z}\quad \mu_Z=-M_J g\mu_B\quad M_J=J,J-1,\cdots\cdots,-J\quad 共\ 2J+1\ 个值$$

$2J+1=2\times4+1=9$

故基态镍原子束在横向不均匀磁场中将分裂成 9 束。

(2)　$$g=1+\frac{J(J+1)-L(L+1)+S(S+1)}{2J(J+1)}=\frac{5}{4},$$

故　$$\mu_J=g\mu_B\sqrt{J(J+1)}=\frac{5}{4}\times\sqrt{4\times(4+1)}\mu_B=\frac{5\sqrt{5}}{2}\mu_B$$

2. 磁感应强度为 0.5 特斯拉的磁场中，钙的 $^1D_2\to{}^1P_1$　$\lambda=732.6\,\text{nm}$ 的谱线在垂直于磁场方向观察将分裂成几条谱线？若相邻谱线间距为 0.7×10^{10} Hz，请计算一下电子的荷质比。

解:

$\because\ ^1D_2\to{}^1P_1\quad S_1=S_2=0$

$\therefore$ 正常塞曼效应　$\Delta(\frac{1}{\lambda})=(-1,0,1)L$

相邻谱线间距　$\Delta\nu=cL=\frac{eB}{4\pi m}$

$$\therefore\frac{e}{m}=\frac{4\pi\Delta\nu}{B}$$

$$=\frac{4\pi\times0.7\times10^{10}}{0.5}\ 库仑/千克\ \approx1.76\times10^{11}\ 库仑/千克$$

$\lambda=732.6\,\text{nm}$ 的谱线在垂直于磁场方向观察将分裂成三条谱线

电子的荷质比为 1.76×10^{11} 库仑/千克