

2003 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

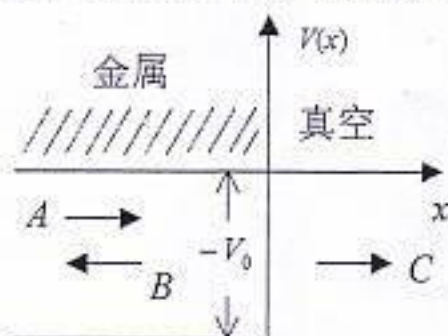
考试科目：量子力学（3 小时，闭卷，每大题 30 分）

- 一. 1. 如果厄密算符 A 对任何矢量 $|u\rangle$, 有 $\langle u|A|u\rangle \geq 0$, 则称 A 为正定算符, 求证: 算符 $A = |a\rangle\langle a|$ 是厄密正定算符.
2. 如果 A 是任一线性算符, 求证 A^*A 是正定的厄密算符, 它的迹等于 A 在任意表象中的矩阵元的模平方之和. 试推导, 当且仅当 $A=0$ 时, $\text{Tr}(A^*A)=0$ 才成立.
3. 求证: 如果 $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$, 则 $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$.
4. 求证: 任一可观测量的平均值对时间的导数由下式给出:

$$i\hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle [A, H] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

- 二. 把传导电子限制在金属内部的是金属内势的一种平均势, 对于下列一维模型 (如图):

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$



试就 (1) $E > 0$, (2) $-V_0 < E < 0$ 两种情况计算接近金属表面的传导电子的反射和透射几率.

- 三. 对于一维谐振子, 求消灭算符 a 的本征态, 将其表示成各能量本征态 $|n\rangle$ 的线性叠加.
- 四. 给定 (θ, φ) 方向单位矢量 $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ 求 $\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \bar{n}$ 的本征值和本征函数. (取 σ_z 表象).
- 五. 有一个定域电子 (不计及其轨道运动) 受到均匀磁场作用, 磁场 B 指向正 x 方向. 磁作用势为:

$$H = \frac{eB}{\mu c} \cdot S_x = \frac{e\hbar B}{2\mu c} \sigma_x$$

设 $t=0$ 时电子的自旋“向上”, 即 $S_z = \hbar/2$, 求 $t > 0$ 时 \bar{S} 的平均值.

2003 年硕士学位研究生招生考试《量子力学》考题答案

一. 1. $\langle u|A|v\rangle = \langle u|a\rangle\langle a|v\rangle = \langle v|a\rangle^* \langle a|u\rangle^* = \langle v|A|u\rangle^*$ 厄密

$$\langle u|A|u\rangle = \langle u|a\rangle\langle a|u\rangle = |\langle u|a\rangle|^2 \geq 0 \quad \text{正定}$$

2. 利用 A^* 的性质, 可得:

$$\langle u|A^*A|v\rangle = \langle v|A^*A|u\rangle^* \quad \text{即 } A^*A \text{ 是厄密算符.}$$

现在取 $|u\rangle = |v\rangle$, 并写出 $|\omega\rangle = A|u\rangle$, 则有:

$$\langle u|A^*A|u\rangle = \langle \omega|\omega\rangle \geq 0 \quad \text{因此, } A^*A \text{ 是正定的.}$$

设 $\{|n\rangle\}$ 是正交完备态集, 于是有:

$$\text{Tr}(A^*A) = \sum_n \langle n|A^*A|n\rangle, \quad \text{利用 } \sum_n |n\rangle\langle n| = I, \text{ 可得:}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^*A) &= \sum_n \langle n|A^* \sum_m |m\rangle\langle m|A|n\rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle n|A^*|m\rangle\langle m|A|n\rangle \\ &= \sum_{n,m} |\langle n|A|m\rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

仅当所有元素 $\langle n|A|m\rangle = 0$ 时等号才成立, 这等价于算符关系式 $A = 0$

3. 令 $f(x) = e^{Ax}e^{Bx}$, 并对 x 求微分:

$$\frac{df}{dx} = (A + e^{Ax}Be^{-Ax})f(x) \quad \text{利用公式 } e^{xA}Be^{-xA} = B + x[A, B]$$

$$\frac{df}{dx} = \{(A+B) + x[A, B]\}f(x)$$

显然 $f(0) = 1$ 则有

$$f(x) = e^{(A+B)x + \frac{x^2}{2}[A, B]} = e^{(A+B)x} e^{\frac{x^2}{2}[A, B]}$$

令 $x = 1$, 则证毕.

4. 设 $|\psi\rangle$ 已归一化. $\langle A \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle$

$$\therefore \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, A\psi \right\rangle + \left\langle \psi, A \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial A}{\partial t} \psi \right\rangle$$

$$\text{代入薛定谔方程则有: } i\hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle [A, H] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

二. 把 $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ 代入薛定谔方程,

$$\text{对于 } x < 0 \text{ 得 } \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}(E + V_0)\psi_1 = 0$$

$$\text{对于 } x > 0 \text{ 得 } \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}E\psi_2 = 0$$

方程的通解为:

$$\psi_1 = Ae^{\frac{i}{\hbar}qx} + Be^{-\frac{i}{\hbar}qx}, \quad q = [2m(E + V_0)]^{1/2}, \quad x < 0$$

$$\psi_2 = Ce^{\frac{i}{\hbar}px} + De^{-\frac{i}{\hbar}px}, \quad p = \sqrt{2mE}, \quad x > 0$$

(1) 对于 $E > 0$, 电子波函数为

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi_1 = Ae^{\frac{i}{\hbar}(qx - Et)} + Be^{-\frac{i}{\hbar}(qx + Et)}, & x < 0 \\ \psi_2 = Ce^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} + De^{-\frac{i}{\hbar}(px + Et)}, & x > 0 \end{cases}$$

显然 $D = 0$, 由 $x = 0$ 处连续性得:

$$A + B = C, \quad q(A - B) = pC$$

$$\therefore B = \frac{q - p}{q + p}A, \quad C = \frac{2q}{q + p}A.$$

$$|j_A| = |A|^2 \frac{q}{m}, \quad |j_B| = |B|^2 \frac{q}{m}, \quad |j_C| = |C|^2 \frac{p}{m}$$

$$T = \frac{|j_C|}{|j_A|} = \frac{4\sqrt{E(E + V_0)}}{(\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E})^2},$$

$$R = \frac{|j_B|}{|j_A|} = \frac{V_0^2}{(\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E})^2}.$$

$$T + R = 1$$

$$\text{若 } E > 0, R \neq 0; \text{ 若 } E \gg V_0, R \approx \frac{V_0^2}{16E^2}$$

$$\text{若 } 0 < E \ll V_0, R \approx 1 - 4\sqrt{\frac{E}{V_0}}$$

(2) 在 $-V_0 < E < 0$ 场合, 则:

$$q = [2m(V_0 - |E|)]^{1/2}, \quad p = i(2m|E|)^{1/2}$$

在 $x > 0$ 区中有界的解是

$$\psi_2 = Ce^{-\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0}x}, \quad d = \hbar(8m|E|)^{-1/2}$$

$x = 0$ 处的连续性给出:

$$A + B = C, \quad \frac{i}{\hbar}q(A - B) = -\frac{1}{2d}C$$

$$\text{由此得到: } \frac{B}{A} = -\frac{1 + \frac{2i}{\hbar}qd}{1 - \frac{2i}{\hbar}qd}, \quad \frac{C}{A} = -2\frac{\frac{2i}{\hbar}qd}{1 - \frac{2i}{\hbar}qd}.$$

$$\text{在 } x > 0, \quad |\psi_2(x)|^2 = 4|A|^2 \frac{V_0 - |E|}{V_0} e^{-\frac{2}{d}x}.$$

三. 利用 $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, 设 $|\alpha\rangle$ 为 $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_n C_n \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\text{用 } \langle n-1| \text{ 左乘, 则得: } C_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} C_{n-1}$$

$$\text{依次递推, 得: } C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

$$\text{利用 } \langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_n |C_n|^2 = |C_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^2}{n!} = 1$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{n!} = e^{|\alpha|^2} \quad C_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{i\delta}, \quad \delta \text{ 为实数, 取 } \delta = 0$$

$$\therefore |\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\text{四. } \sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{设 } \sigma_n \text{ 的本征函数为 } |\phi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \text{ 本征值为 } \lambda, \text{ 则本征值方程为}$$

$$(\sigma_n - \lambda) |\phi\rangle = 0, \text{ 求出 } \lambda = \pm 1.$$

对于 $\lambda = 1$, 可求出 $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi}$

$$\therefore |\phi_1(\theta, \phi)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

对于 $\lambda = -1$

$$|\phi_{-1}(\theta, \phi)\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

五. 在 S_z 表象中, 哈密顿算符表示为

$$H = \frac{e\hbar B}{2\mu c} \sigma_z = \hbar\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \frac{eB}{2\mu c}$$

$$\text{令 } \chi(t) = a(t)\chi_{\frac{1}{2}} + b(t)\chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{满足 } i\hbar \frac{d\chi(t)}{dt} = H\chi(t)$$

$$\text{初始条件: } \chi(0) = \chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } a(0) = 1, b(0) = 0$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{解为: } \chi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -i \sin \omega t \end{pmatrix}$$

\bar{S} 的平均值为:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \chi^\dagger \sigma_x \chi = 0$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin 2\omega t$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos 2\omega t$$

也可以用海森堡运动方程求解.