



# 中国科学院 - 中国科学技术大学

## 2003 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称: 电动力学 (A)

一. 选择题 (共 5 题, 每题 4 分, 请答在答卷纸上!)

1. 高斯定律不成立, 如果:

- A. 存在磁单极; B. 导体为非等势体; C. 平方比律不精确成立;  
D. 光速为非普适常数;

2. 在半径为  $R$  的球内充满介电常数为  $\epsilon$  的均匀介质, 球心处放一点电荷, 球面为接地导体壳. 如果挖去顶点在球心的立体角等于  $2$  的一圆锥体介质, 则圆锥体中的场强与介质中的场强之比为:

- A.  $1:1$ , B.  $2:4\pi$ , C.  $\epsilon_0:\epsilon$ , D.  $2\epsilon_0:4\pi\epsilon$ ,

3. 两个无限大的接地导体平面组成一个  $60^\circ$  的二面角, 在二面角内与两导体平面等距离处放一个点电荷  $Q$ , 则它的象电荷的个数为:

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 无穷可数个.

4. 一截面半径为  $b$  的无限长直圆柱导体, 均匀地流过电流  $I$ , 则储存在单位长度导体内的磁场能量为:

- A. 与  $b$  无关, B. 正比于  $b^2$ , C. 与  $I$  无关, D 正比于  $I$ .

5. 区域内任意一点  $\vec{r}$  处的静磁场可用磁标势描述, 只当:

- A. 区域内各处电流密度为零; B.  $\vec{H}$  对区域内任意封闭路径积分为零;  
C. 电流密度守恒; D.  $\vec{r}$  处的电流密度为零;

二. 填空题 (共 20 分) (请答在答卷纸上!)

1. 已知空间电场为  $\vec{E} = \frac{a\vec{r}}{r^2} + \frac{b\vec{r}}{r^3}$  ( $a, b$  为常数), 则空间电荷分布为 (5 分)

2. 在同轴电缆中填满磁导率为  $\mu_1, \mu_2$  的两种磁介质, 它们沿轴各占一半空间. 设电流为  $I$  (如图), 则介质  $\mu_1$  中和介质  $\mu_2$  中离中心轴  $r$  处的磁感应强度分别为 (10 分).

3. 一矩型波导管, 管内为真空, 管截面矩形的长和宽分别为  $a$  和  $b$ , 且  $a > b$ , 要使角频率  $\omega$  的  $TE_{10}$  波能在管中传播,  $a$  应满足 (5 分)

三. 1. 写出麦克斯韦方程组; (8 分)。

2. 由麦克斯韦方程组导出标势  $\Phi$  和矢势  $\vec{A}$  所满足的基本方程组; (12 分)

3. 在洛伦茨规范下, 由上述基本方程组导出达朗贝尔方程组。(10 分)

四. 半径为  $R$  的带电球面, 面电荷密度为  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  ( $\theta$  为常量), 球外充满介电常数为  $\epsilon$  的均匀介质 (如图), 求球内外的电势和电场强度。(30 分)

五. 一电偶极子位于坐标系的原点, 它的电偶极矩为  $\vec{P} = P_0 \cos \omega t \vec{e}_x$ 。试求:

1. 它在  $r \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  处的辐射场的电场强度和磁场强度; (15 分)

2. 该处的辐射场能流密度。(5 分)

提示: 直角坐标基矢与球坐标基矢关系为:

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{pmatrix}$$

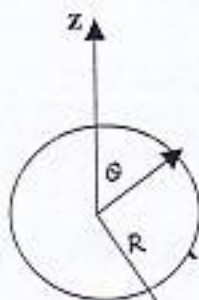
六. 参考系  $\Sigma'(x', y', z')$  以匀速度  $\vec{V} = (V, 0, 0)$  相对于惯性系  $\Sigma(x, y, z)$  运动。在  $\Sigma$  系观测, 空间某区域静磁场为  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ 。试求:

1. 在  $\Sigma'$  系观测, 该区域内的电磁场; (20 分)

2. 若该区域内有一电荷量为  $q$  的粒子相对于  $\Sigma$  静止, 求出  $\Sigma'$  系观测, 这个粒子所受到的电磁力 (10 分)。



第二. 2 题图



第四题图



中国科学院 & 中国科学技术大学  
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

---

试题名称: 电动力学 (A)

一. 选择题 (共 5 题, 每题 4 分)

1. C; 2. A; 3. B; 4. A; 5. B;

二. 填空题 (共 20 分)

1.  $\rho = \epsilon_0 \left( \frac{a}{r^2} + 4\pi b \delta(r) \right);$

2. 介质  $\mu_1$  中磁感应强度和介质  $\mu_2$  中的磁感应强度都为  $\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_2 + \mu_1)};$

3.  $a > \frac{c\pi}{\omega};$

三. 解: 1. 麦克斯韦方程组: (每式各 2 分)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

2.  $\varphi$  和  $\vec{A}$  满足的基本方程:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5) \text{ (4 分)}$$

将 (5) 代入 (1), (2), 得:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6) \text{ (4 分)}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mu_0 \vec{J}, \quad (7) \text{ (6 分)}$$

# 中国科学院 & 中国科学技术大学

## 2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

3. 洛伦兹规范:

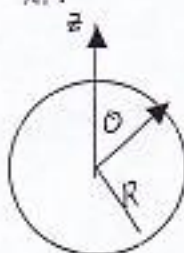
$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (8) (2 \text{ 分})$$

对 (6), (7) 两式, 应用 (8) 可得到达朗贝尔方程组:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3 \text{ 分})$$

四. 解:



如图, 设球内外电势分别为  $\varphi_1, \varphi_2$ . 因球内外电荷密度都为零, 故  $\varphi_1, \varphi_2$  满足方程:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad r < R \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad r > R \quad (2) (3 \text{ 分})$$

边条件:

$$\text{当 } r \rightarrow \infty, \varphi_2 \rightarrow 0; \text{ 当 } r \rightarrow 0, \varphi_1 \text{ 为有限}; \quad (3) (3 \text{ 分})$$

边值关系:

$$\varphi_1 = \varphi_2 (r = R), \quad (4)$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\sigma_0 \cos \theta (r = R), \quad (5) (4 \text{ 分})$$

由对称性及边条件, 方程 (1) 和 (2) 的解可写为:

$$\varphi_1 = \sum a_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \sum \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad (7) (4 \text{ 分})$$

利用边值关系 (4), (5), 可得到:

$$b_n = a_n R^{2n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$2\epsilon b_1 + a_1 \epsilon_0 R^3 = \sigma_0 R^3, \quad b_n = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{n}{n+1} a_n R^{2n+1}, (n \neq 1) \quad (9) (4 \text{ 分})$$

解得:

$$a_1 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon + \epsilon_0}, \quad b_1 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon + \epsilon_0} R^3, \quad a_n = b_n = 0, (n \neq 1), \quad (10) (4 \text{ 分})$$

求得:

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_0 r}{2\epsilon + \epsilon_0} \cos \theta = \frac{\sigma_0}{2\epsilon + \epsilon_0} (\vec{r} \cdot \vec{e}_z), \quad (11)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon + \epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta = \frac{\sigma_0}{2\epsilon + \epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} (\vec{r} \cdot \vec{e}_z), \quad (12) (4 \text{ 分})$$

中国科学院 & 中国科学技术大学  
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

---

球内外电场:

$$\vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \vec{e}_z, \quad (13)$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = \frac{\sigma_0 R^3}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{e}_z)}{r^3} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{e}_z \right], \quad (14) (4 \text{ 分})$$

五. 解: 辐射场:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}(t')}{dt'} = -\frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \sin \omega t' \vec{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \sin(kr - \omega t) \vec{e}_x, \quad (5 \text{ 分}) \\ &= \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \sin(kr - \omega t) (\sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{\omega p_0}{4\pi} \nabla \times \left[ \frac{\sin(kr - \omega t)}{r} \vec{e}_x \right] \\ &= \frac{\omega p_0}{4\pi r} [\nabla \sin(kr - \omega t)] \times \vec{e}_x, \quad (5 \text{ 分}) \\ &= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi c} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} (\sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= c\mu_0 \vec{H} \times \vec{e}_r \\ &= \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} (\sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\phi) \times \vec{e}_r \\ &= \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} (\cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi); \quad (5 \text{ 分}) \end{aligned}$$

能流密度:

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \vec{E} \times \vec{H} \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c} \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} (\sin^2 \phi + \cos^2 \theta \cos^2 \phi) \vec{e}_r \\ &= \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \vec{e}_r. \quad (5 \text{ 分}) \end{aligned}$$



中国科学院 & 中国科学技术大学  
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

---

六. 解: (1) 由电磁场的变换关系得:

$$E'_x = E_x = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = -\gamma v B_z, \quad (3 \text{ 分})$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) = \gamma v B_y, \quad (3 \text{ 分})$$

$$B'_x = B_x, \quad (2 \text{ 分})$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) = \gamma B_y, \quad (3 \text{ 分})$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) = \gamma B_z, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\vec{E}' = (0, -\gamma v B_z, \gamma v B_y), \quad (2 \text{ 分})$$

$$\vec{B}' = (B_x, \gamma B_y, \gamma B_z), \quad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}; \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 粒子所受的力为:

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q\vec{E}' + q(-v\vec{e}_x) \times \vec{B}' \\ &= q(-\gamma v B_z \vec{e}_y + \gamma v B_y \vec{e}_z) - qv\vec{e}_x \times (B_x \vec{e}_x + \gamma B_y \vec{e}_y + \gamma B_z \vec{e}_z); \quad (10 \text{ 分}) \\ &= 0 \end{aligned}$$