中国科学院—中国科学技术大学
2004年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　　高等数学(B)

一、填空题（本题5小题，每小题5分，满分25分，把答案填在答题纸上）.

1. 当 $x\to 0$, $\frac{1}{1+x}-(1-x)$ 与 x^{α} 为同阶无穷小量，则 $\alpha=$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\int_n^{n+1} x\sin\frac{1}{x}=1$
3. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx=$.
4. 设 $z=f(x,y)=\cos x+\sin y-e^{xy}+2xe^{y}$, 则 $dz|_{(0,0)}=2dx+dy$
5. 方程 $\frac{\sin y}{e^{\cos y}}dy=\frac{1}{x^2}dx\ (x\neq 0)$ 的通解为 $y=$. $\arccos(-\ln(-\frac{1}{x}+C))$

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，满分20分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，把所选项的字母填在答题纸上）.

1. 已知 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则 有　　可微 $\Leftarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 连续
   (A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有定义　　(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 一定连续
   (C) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 一定可微　　(D) (x_0,y_0) 一定是 $f(x,y)$ 的极值点
2. 下列方程在空间直角坐标系中表示旋转抛物面方程的是
   (A) $x^2+y^2+z^2=0$　　(B) $x+y+z^2=0$
   (C) $x^2+y^2+z=0$　　(D) $x^2+y^2-z^2=0$
3. $\int_0^{2a}dx\int_{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy\ (a>0)$ 化为极坐标系下的累次积分为
   (A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr$
   (C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}rdr$　　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$
4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则
   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛　　(B) $a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots$ 收敛
   (C) 数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right\}$ 有界　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n-1)$ 收敛
5. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f''(x)>0$, $f(0)=0$, 则函数 $\frac{f(x)}{x}$
   (A) 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单减
   (B) 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单增
   (C) 在 $(-\infty,0)$ 内单减, $(0,+\infty)$ 内单增
   (D) 在 $(-\infty,0)$ 内单增, $(0,+\infty)$ 内单减

三、（本题10分） 设函数 $f(x)$ 二次可导，$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{\sin^2(x)}$.

四、（本题10分） 已知 $f'(\sin x)=\cos 2x+\tan^2 x$, $f(0)=0$, 当 $-1<x<1$ 时求函数 $f(x)$.

五、（本题10分） 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}\,dx$.

六、（本题10分） 设 $z=y\varphi(\frac{x}{y})+\ln(2x-y)$, 其中 φ 具有二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

七、（本题10分） 计算 $\displaystyle\iint_D |x-y^2|\,dxdy$, 其中 D 为区域 $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

八、（本题11分） 求立方抛物线 $y=x^3$ $(x\ge 0)$ 的一条切线，使界于立方抛物线、切线及直线 $y=0$、$x=1$ 之间的面积最小.

九、（本题11分） 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内二阶可导，在端点处的左、右导数分别为 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$, 并设 $f(a)=f(b)=0$ 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 与 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$, $f''(\eta)=0$.

十、（本题共12分，每小题6分）

1. 求曲线 $\begin{cases} x=4t+t^3 \\ y=-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 与平面 $\Pi: x-2y-z+4=0$ 平行的切线 L 的方程.
2. 求过 L 且与平面 Π 垂直的平面方程.

十一、（本题11分） 设函数 $y(x)$ 的二阶导函数连续，且 $y'(0)=0$. 求由方程 $y(x)=1+\frac{1}{3}\int_0^x[-y''(t)-2y(t)+6te^{-t}]dt$ 确定的函数 $y=y(x)$.

十二、（本题10分） 求函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛半径、收敛域和它在这个域上的和函数.

生物物理

中国科学院、中国科学技术大学
2004年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：高等数学(B)

一、1. $\alpha=2$； 2. 1； 3. $2(e^2+1)$

3. $dz|_{(0,0)}=2dx+dy$ 4. $e^{-\cos y}+\frac{1}{x}=c$ （c为任意常数）

二、1. A； 2. C； 3. D； 4. C； 5. B

三、解法一．$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=x+x^2+o(x^2)$ (5分)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1 \quad (10分)$$

解法二．$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}$ (3分)

$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}$ (6分)

$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}$ (8分)

$=\frac{1}{2}f''(0)=1$ (10分)

四 解：因 $f'(\sin x)=\frac{1}{1-\sin^2 x}-2\sin^2 x$ (2分)

令 $u=\sin x$，$-1<u<1$

$f'(u)=\frac{1}{1-u^2}-2u^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)-2u^2$ (4分)

两边积分 $f(u)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}-\frac{2}{3}u^3+c$ $-1<u<1$

即 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{2}{3}x^3+c$ $-1<x<1$ (8分)

$f(0)=0$ 得 $c=0$

$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{2}{3}x^3$ $-1<x<1$ (10分)

五、解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x^2}{1+\sin x^2} d(\sin x^2)$ （4分）

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\sin x^2}\right) d(\sin x^2)$ （6分）

$= \sin x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \ln(1+\sin x^2) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ （8分）

$= \sin\frac{\pi^2}{4} - \ln\left(1+\sin\frac{\pi^2}{4}\right)$ （10分）

六、解: $\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{2}{2x-y}$

$= \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2}{2x-y}$ （5分）

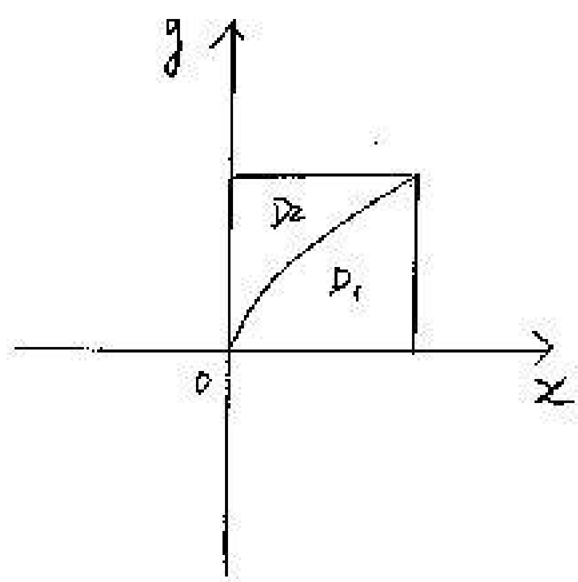
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2}{(2x-y)^2}$ （10分）

七、解: $\iint_D |x-y^2| dxdy$

$= \iint_{D_1}(x-y^2)dxdy + \iint_{D_2}(y^2-x)dxdy$ （4分）

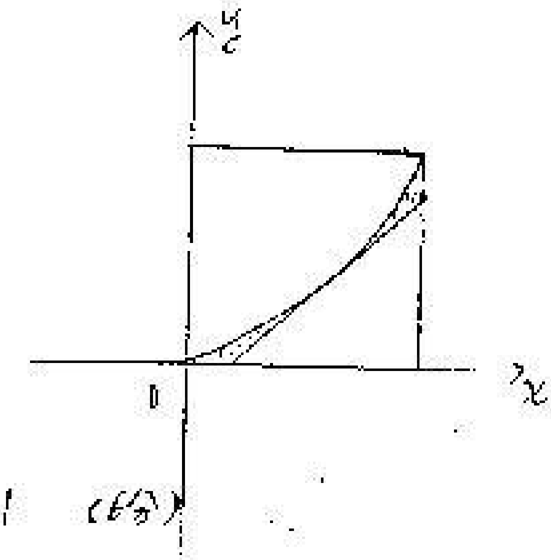
$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (x-y^2)dx + \int_0^1 dy \int_0^{y^2}(y^2-x)dx$ （8分）

$= \frac{11}{30}$



八. 解：设切点为 (x_0, x_0^3)，则切线方程为

$$y = 3x_0^2(x-x_0)+x_0^3 = 3x_0^2x-2x_0^3$$



与 x 轴的交点 $(\frac{2}{3}x_0, 0)$ (2分)

$$S(x_0) = \int_0^1 x^3dx - \int_{\frac{2}{3}x_0}^1 (3x_0^2x-2x_0^3)dx$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}x_0^4+2x_0^3-\frac{3}{2}x_0^2 \quad 0\le x_0\le 1 \quad (6分)$$

$$S'(x_0) = -\frac{8}{3}x_0^3+6x_0^2-3x_0 = -\frac{x_0}{3}(2x_0-3)(4x_0-3)=0$$

得 $x_0=0$. $x_0=\frac{3}{4}$ $x_0=\frac{3}{2}$ (舍)

$S(0)=\frac{1}{4}$，$S(\frac{3}{4})=\frac{5}{128}$

故当 $x_0=\frac{3}{4}$ 时，$S(x_0)$ 最小。 (9分)

所求切线方程为 $y=\frac{27}{16}x-\frac{27}{32}$ (11分)

九. $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$ (1分)

由 $f(a)=f(b)=0$ 知

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0 \quad (4分)$$

由极限的保号性知存在 $(\delta>0)$. $(a, a+\delta)$ 及 $(b-\delta, b)$

当 $x\in(a, a+\delta)$ 时 $f(x)>0$

$x\in(b-\delta, b)$ 时 $f(x)<0$

由连续函数的介值定理知 存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ (6分)

又 $f(x)$ 在 $[a,\xi]$，$[\xi, b]$ 上可导，$f(a)=f(\xi)=f(b)=0$

由 Rolle 定理知，存在 $\eta_1\in(a,\xi)$，$\eta_2\in(\xi, b)$ 使

$f'(\eta_1)=0$，$f'(\eta_2)=0$ (9分)

$f'(x)$ 在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上连续可导，由 Rolle 定理知 存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$

使 $f''(\eta)=0$ (11分)

十、解 (1) 曲线的切向量 $\vec{\tau}=(4+3t^2,-2t,3t^2)$，平面法向量 $\vec{n}=(1,-2,-1)$ (2分)

切线与平面π平行 故

$\vec{\tau}\cdot\vec{n}=4+3t^2+4t-3t^2=0 \Rightarrow t=-1$

得切点 $(-5,-1,-1)$，$\vec{\tau}=(7,2,3)$ (4分)

切线方程为：$\dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ (6分)

(2) 过L且与平面π垂直的平面π_1的法向量为$\vec{n}_1$ (10分)

则 $\vec{n}_1=\vec{n}\times\vec{\tau}=-4\vec{i}-10\vec{j}+16\vec{k}$

取 $\vec{n}_1=(2,5,-8)$

π_1方程为 $2(x+5)+5(y+1)-8(z+1)=0$ (12分)

$2x+5y-8z+7=0$

十一、解：在方程两端对x求导，有

$y'=\frac{1}{3}(-y''-2y+6xe^{-x})$

即 $y''+3y'+2y=6xe^{-x}$ (1) 且初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$. (3分)

$y''+3y'+2y=0$ (2)

$r^2+3r+2=0$

$r_1=-2$，$r_2=-1$

方程(2)的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$ (6分)

方程(1)有形如 $y^*=x(ax+b)e^{-x}$ 的特解，代入方程(1)，

得 $a=3$，$b=-6$

$y^*=(3x^2-6x)e^{-x}$ (9分)

(1)的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+(3x^2-6x)e^{-x}$

由初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 得 $C_1=-7$，$C_2=8$

所求函数 $y=8e^{-x}-7e^{-2x}+(3x^2-6x)e^{-x}$ (11分)

十二.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}}{\frac{2n-1}{2^{n}}x^{2n-2}}\right| = \frac{1}{2}x^2$

当 $|x|<\sqrt{2}$ 时 级数收敛 (2)

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，对应的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散

所以收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (4分)

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

$\int_0^x S(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{1}{x}\cdot\dfrac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}$ (8分)

两边求导

$S(x)=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ $(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$ (10分)