2009年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：普通物理 A　　　　科目代码:624

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，可使用计算器

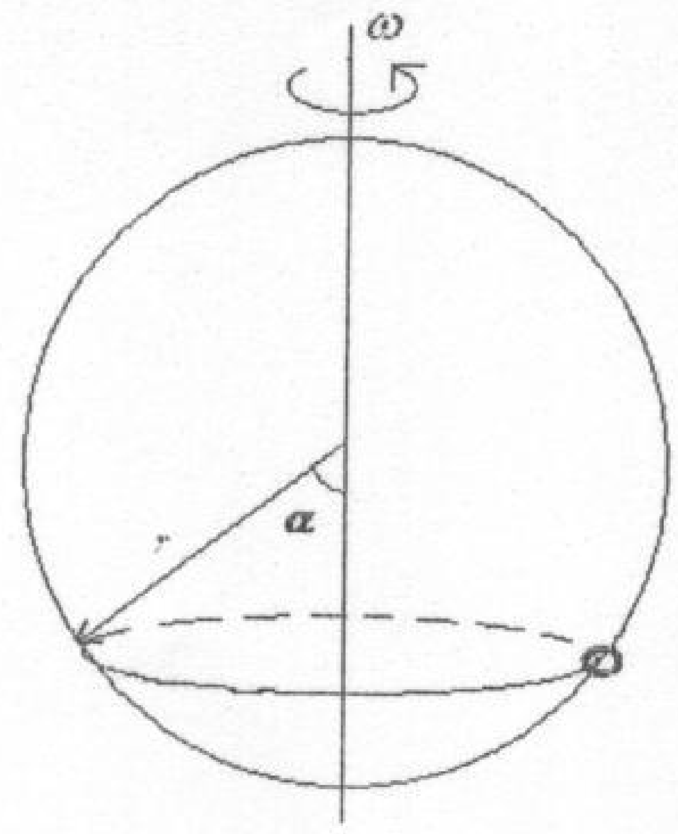
1. （15分）甲火车以43.2千米/小时的速度行驶，其上一乘客听到对面驶来的乙火车鸣笛声的频率为$\nu_1=512$赫兹；当这一火车过后，听其鸣笛声的频率为$\nu_2=428$赫兹。求乙火车上的人听到乙火车鸣笛的频率ν_0和乙火车对于地面的速度u。设空气中声波的速度为340米/秒。

2. （20分）小珠可以在半径为0.1m的铅直圆环上作无摩擦滑动，当圆环以2转/秒的角速度绕圆环竖直直径转动时，如图所示，试求

(1) 小珠在环中平衡时与竖轴的夹角α；（10分）

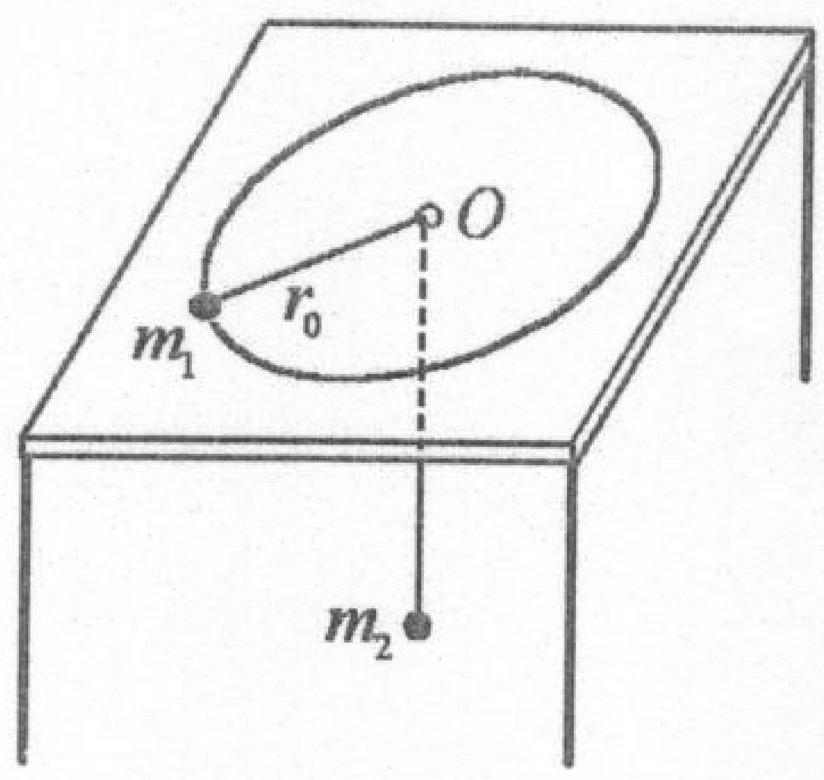
(2) 这小珠是否可以达到与环心同一水平高度？（5分）

(3) 如环以1转/秒的角速度匀速转动，情况又将如何？（5分）



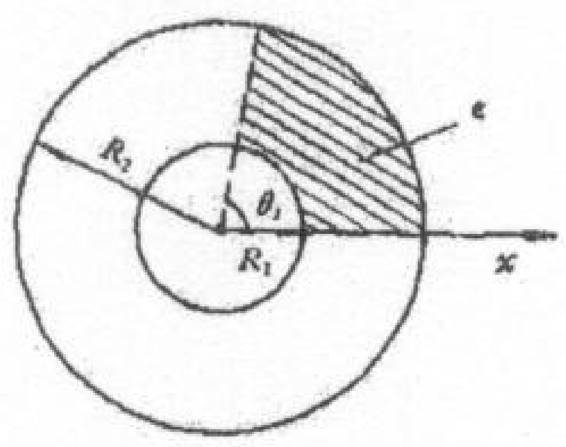
题2图

3. （20分）如图所示，在水平的光滑桌面上开有一个小孔，一条绳子穿过小孔，其两端各系一质量为$m_1=m_2=m$的物体。开始时，用手握住m_2，桌上的物体m_1则以$v_0=3\sqrt{gr_0/2}$的速率做半径为r_0的匀速圆周运动，然后放手。求以后运动中桌上部分的绳子的最大长度和最小长度。



题3图

4. （20分）有一圆柱形电容器，单位长度带电为τ，两导体间$0<\theta<\theta_1$部分填充相对介电常数为ε的电介质，其余部分为空气。内导体半径为R_1，外导体半径为R_2。忽略边缘效应。求：



题4图

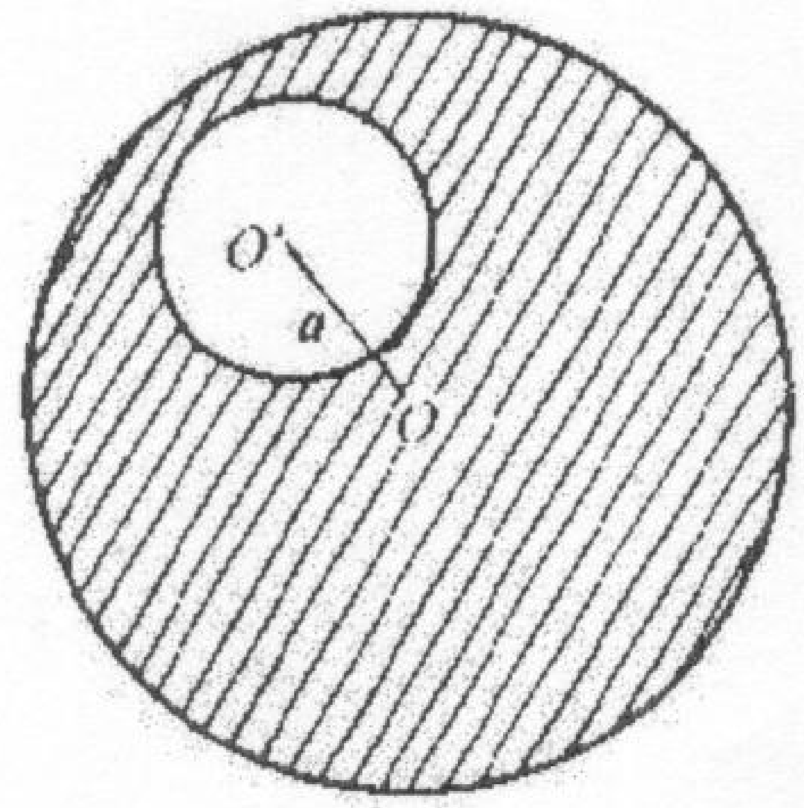
（1） 两导体间空气和介质内的电位移矢量$\bar{D}$和电

场强度 $\vec{E}$；

（2） 内导体表面上的自由面电荷密度；

（3） 两导体间的电压；

（4） 电容器单位长度的电容。



题 5 图

5. (15 分)如图所示，一无限长直圆柱体，内有一无限长直圆柱形空洞，空洞的轴线与圆柱的轴线平行但不重合，相距为 a。今有电流沿轴线方向流动并均匀分布在横截面上，电流密度为 $\vec{j}$。试求空洞内任一点 P 的磁感应强度 $\vec{B}$。

6. （20 分）一绝缘圆柱体表面均匀带电（半径为 R，长为 L，且 $L >> R$），电荷面密度为 σ_e，一个外加的力矩使这圆柱以匀角加速度 β 绕其轴线旋转（设初角速度为零）。求：

（1） 圆柱体内的磁感应强度 $\vec{B}$；

（2） 圆柱体内表面上的电场强度 $\vec{E}$；

（3） 圆柱体内表面上的玻印亭矢量 $\vec{S}$ 的大小；

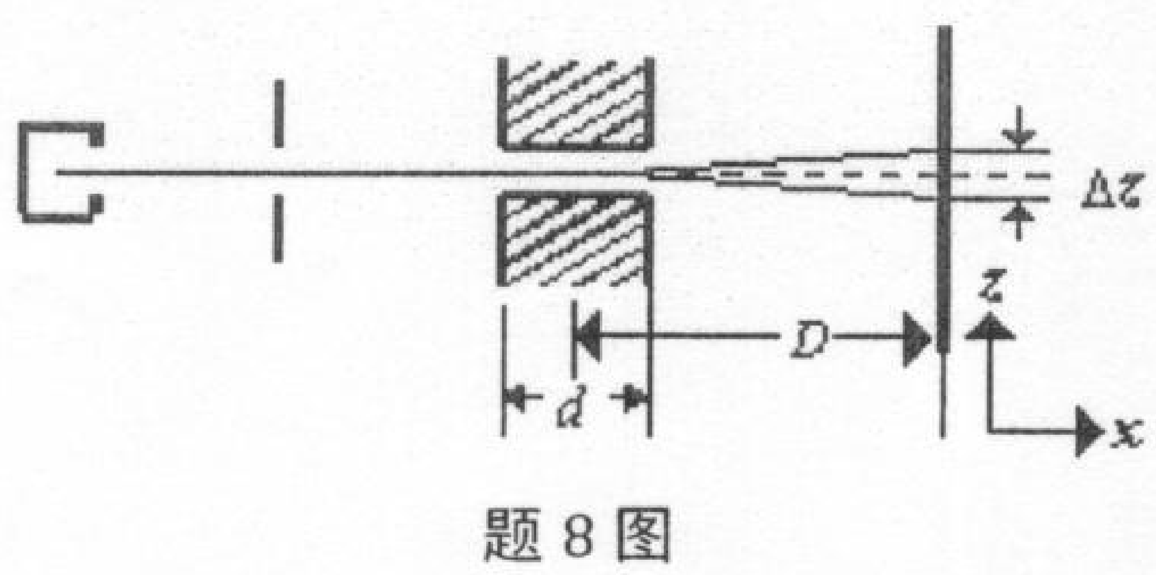
（4） 进入圆柱体内部的 $\vec{S}$ 的总通量，比较它与总电磁能随时间变化率的大小。

7. （20 分）若有下列谱项：${}^2S_{1/2}$，${}^1P_1$，${}^3D_2$ 及 ${}^1F_3$， 试阐明：

（1）弱磁场中哪些谱项的磁能级成分之间的间隔有最大值；

（2）对于哪些谱项，相应的有效磁矩能够按如下的公式计算： $\mu_J = \mu_B\sqrt{J(J+1)}$。

8. （20 分）在斯特恩－盖拉赫实验中，极不均匀的横向（z 方向）磁场梯度为 $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 10\ \mathrm{T/cm}$，磁极的纵向长度 $d = 4cm$，磁极中心到屏的长度 $D = 10cm$（如图所示），在屏上两束分开的距离 $\Delta z = 0.002m$。使用的原子束是处于基态的银原子，原子速度 $v = 500m/s$。试求原子磁矩在磁场方向上投影 μ_z 大小。磁场边缘的影响忽略不计。



题 8 图

2009 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

1. （15 分）甲火车以43.2千米/小时的速度行驶，其上一乘客听到对面驶来的乙火车鸣笛声的频率为$\nu_1=512$赫兹；当这一火车过后，听其鸣笛声的频率为$\nu_2=428$赫兹。求乙火车上的人听到乙火车鸣笛的频率ν_0和乙火车对于地面的速度u。设空气中声波的速度为340米/秒。

解：由题得：
$$\begin{cases}\dfrac{v+v_0}{v-u}\nu_0=\nu_1=512H_Z\\ \dfrac{v-v_0}{v+u}\nu_0=\nu_2=428H_Z\end{cases}$$

其中，$v=340\text{m/s}$　$v_0=43.2\text{km/h}=12\text{m/s}$

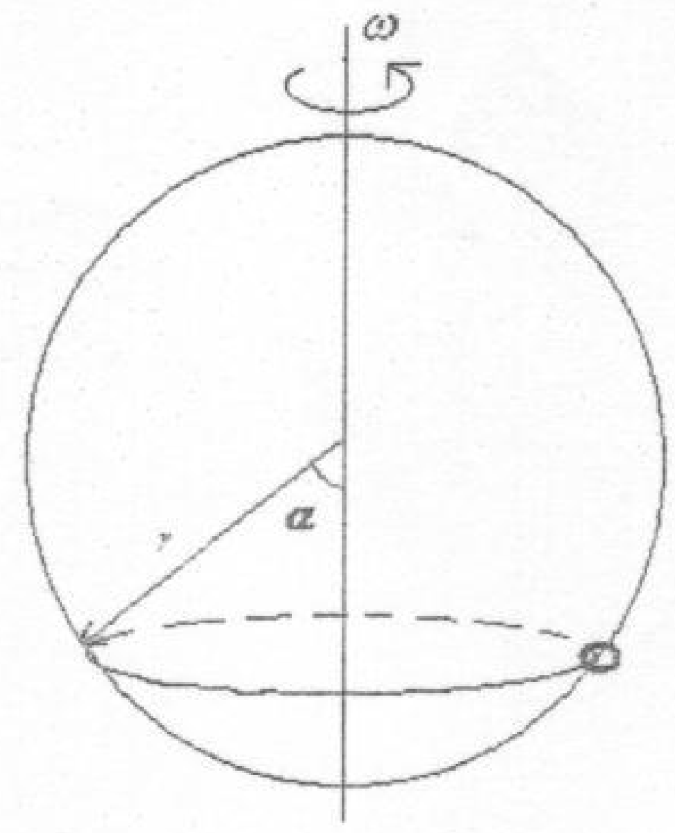
得：$\nu_0=468H_Z$　　$u=18.4m/s=66.3\text{km/h}$

2. （20 分）小珠可以在半径为 0.1m 的铅直圆环上作无摩擦滑动，当圆环以 2 转/秒的角速度绕圆环竖直直径转动时，如图所示，试求

(1) 小珠在环中平衡时与竖轴的夹角α；

(2) 这小珠是否可以达到与环心同一水平高度？

(3) 如环以1转/秒匀速转动，情况又将如何？



题 2 图

解：(1) 小珠的平衡方程为：
$$\begin{cases}mg-N\cos\alpha=0\\ N\sin\alpha=mR\omega^2=mr\sin\alpha(2\pi n)^2\end{cases}$$

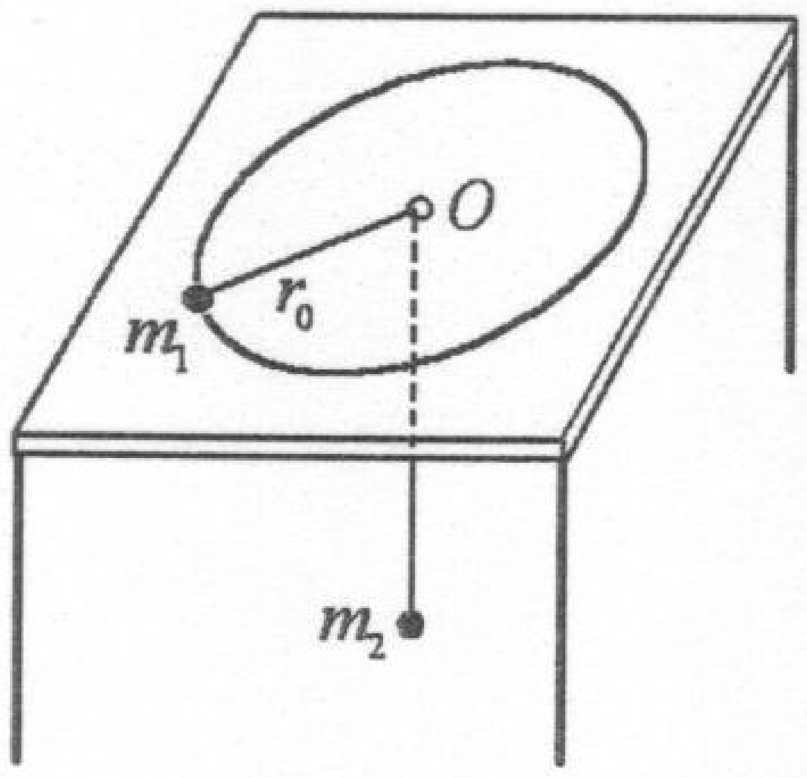
得$\cos\alpha=\dfrac{g}{4\pi^2n^2r}$，$\alpha=51.6^\circ$。

(2) 小珠上升到于环心同一高度，此时$\alpha=90^\circ$，则$n=\infty$，不符合实际。因此小球不可能上升到与环心同一高度。

(3) 若环以 1 秒/米转动，n=1，此时$\cos\alpha=\dfrac{g}{4\pi^2n^2r}=2.5$，此时小珠不可能作任何圆周运动，故小珠只会呆在圆环底部。

3. （20 分）如图所示，在水平的光滑桌面上开有一个小孔，一条绳子穿过小孔，其两端各系一质量为$m_1=m_2=m$的物体。开始时，用手握住m_2，桌上的物体m_1则以

$v_0=3\sqrt{gr_0/2}$ 的速率做半径为 r_0 的匀速圆周运动，然后放手。求以后运动中桌上部分的绳子的最大长度和最小长度。



题 3 图

解：利用角动量守恒和能量守恒，设新位置坐标和速度分别为 r,v

$$mr_0v_0=mrv$$

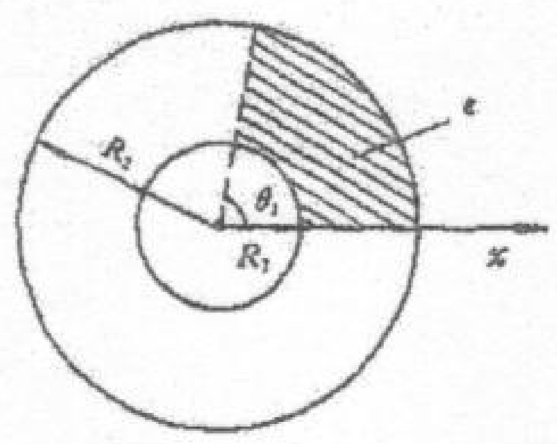
$$\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}mv^2+mg(r-r_0)$$

代入 v_0 的值，消去 v 得：$4r^3-13r_0r^2+9r_0^3=0$

解得：$r_1=r_0$，$r_2=3r_0$，$r_3=-3r_0/4$（不合题意，舍去）

即最小距离 r_0，最大距离 $3r_0$ 。

4. （20 分）有一圆柱形电容器，单位长度带电为 τ，两导体间 $0<\theta<\theta_1$ 部分填充相对介电常数为 ε_r 的电介质，其余部分为空气。内导体半径为 R_1，外导体半径为 R_2。忽略边缘效应。求：



题 4 图

（1） 两导体间空气和介质内的电位移矢量 $\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$；

（2） 内导体表面上的自由面电荷密度；

（3） 两导体间的电压；

（4） 电容器单位长度的电容。

解：

（1） 介质和空气中的场强由于对称性只有径向分量，同半径处相等，且满足边界条件。因界面与电力线重合，所以 $\vec{E}$ 的分布同。

$$\vec{E}_0=\vec{E}\quad \therefore \frac{\vec{D}_0}{\varepsilon_0}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

式中，$\vec{E}_0,\vec{D}_0$ 代表空气中的场强与电位移，$\vec{E},\vec{D}$ 代表介质中的场强与电位移，由高斯定理，有：

$$D_0(2\pi-\theta_1)r+D\theta_1 r=\tau$$

$$\therefore D_0=\frac{\tau}{[(2\pi-\theta_1)+\varepsilon_r\theta_1]r}$$

$$D = \frac{\varepsilon_r \tau}{[(2\pi - \theta_1) + \varepsilon_r \theta_1]r}$$

$$E = E_0 = \frac{\tau}{[(2\pi - \theta_1)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_r \theta_1]r}$$

（2） 由高斯定理可得内导体表面的自由面电荷密度为:

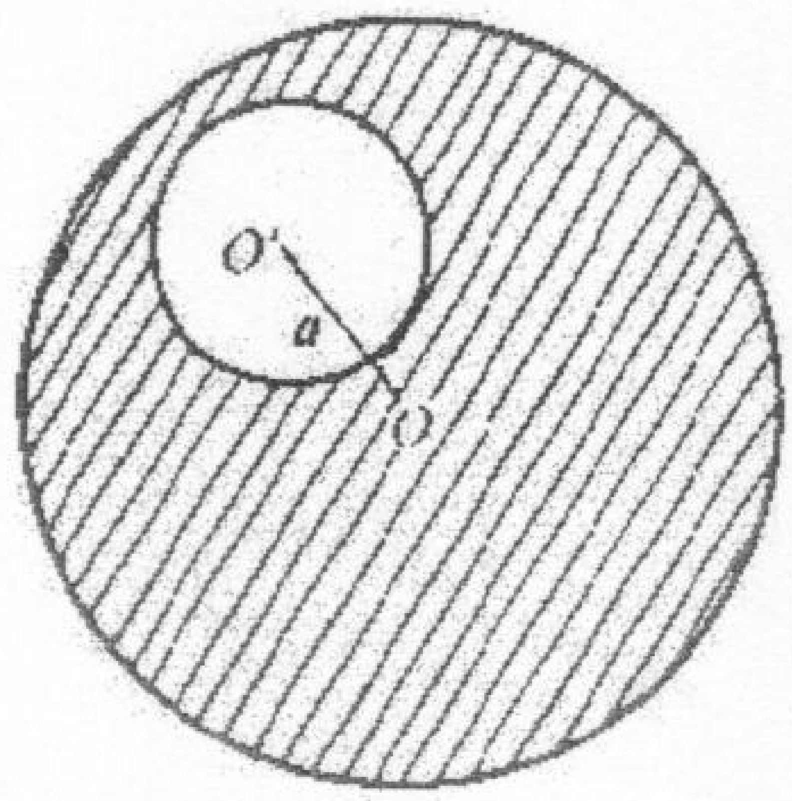
$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{\tau}{(2\pi - \theta_1 + \varepsilon_r \theta_1)R_1} & (\theta_1 < \theta < 2\pi) \\ \dfrac{\varepsilon_r \tau}{[(2\pi - \theta_1) + \varepsilon_r \theta_1]R_1} & (0 < \theta < \theta_1) \end{cases}$$

（3） 两导体间的电压为:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau dr}{[(2\pi - \theta_1)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_r \theta_1]r} = \frac{\tau \ln(R_2 / R_1)}{[(2\pi - \theta_1)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \theta_1]}$$

（4） 电容器单位长度的电容为: $C = \dfrac{\tau}{U} = \dfrac{[(2\pi - \theta_1)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_r \theta_1]}{\ln(R_2 / R_1)}$

5. (15 分)如图所示，一无限长直圆柱体，内有一无限长直圆柱形空洞，空洞的轴线与圆柱的轴线平行但不重合，相距为a。今有电流沿轴线方向流动并均匀分布在横截面上，电流密度为$\vec{j}$。试求空洞内任一点 P 的磁感应强度$\vec{B}$。



题 5 图

解：本题可看作是两个均匀电流叠加而成：一个电流均匀分布在实心圆柱体内，电流密度$\vec{j}$；另一个电流分布在空洞处，电流密度为$-\vec{j}$。据对称性和安培环路定理，均匀实心圆柱电流$\vec{j}$在柱体内产生的磁感应强度$\vec{B}_1$：

$$\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \cdot 2\pi R = \mu_0 j \cdot \pi R^2$$

$$\therefore B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 j R$$

方向由右手定则定，写成矢量式：$\vec{B}_1 = \dfrac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \times \vec{R}$

同样，反向电流$-\vec{j}$在空洞内的 P 点产生的磁感应强度$\vec{B}_2$为:

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0(-\vec{j})\times\vec{r}$$

由叠加原理，P 点的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{2}\mu_0\vec{j}\times(\vec{R}-\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu_0\vec{j}\times\vec{a}$$

6. （20 分）一绝缘圆柱体表面均匀带电（半径为R，长为L，且$L >> R$），电荷面密度为σ_e，一个外加的力矩使这圆柱以匀角加速度β绕其轴线旋转（设初角速度为零）。求：

（1） 圆柱体内的磁感应强度$\vec{B}$；

（2） 圆柱体内表面上的电场强度$\vec{E}$；

（3） 圆柱体内表面上的玻印亭矢量$\vec{S}$的大小；

（4） 进入圆柱体内部的$\vec{S}$的总通量，请比较它与总电磁能随时间变化率的大小。

解：$L >> R$，σ_e、β已知

（1） 面电流密度：$i_0 = \dfrac{2\pi R\sigma_e}{T} = R\sigma_e\omega = R\sigma_e\beta t$

$$\therefore B = \mu_0 nI = \mu_0 i_0 = \mu_0\sigma_e R\beta t(\hat{\beta})$$

（2） 以R为半径（内表面）作环路，由：$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\iint_{S_c}\vec{B}\cdot d\vec{S}$，得：

$$E\cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt}(\mu_0\sigma_e\pi R^3\beta t) = -\mu_0\sigma_e\pi R^3\beta$$

$$\therefore E = -\frac{1}{2}\mu_0\sigma_e R^2\beta$$

$\vec{E}$的方向为$\vec{e}_r\times\vec{e}_\omega$，$\vec{e}_r$是由轴指向场点的单位矢量。

（3）$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_e R^2\beta(\vec{e}_r\times\vec{e}_\omega)\times\dfrac{\vec{B}}{\mu_0} = -\dfrac{1}{2}\mu_0\sigma_0^2 R^3\beta^2 t\vec{e}_r$

（4）进入L长的圆柱体内$\vec{S}$的通量：$\phi_S = 2\pi RLS = \pi\mu_0\sigma_e^2 R^4 L\beta^2$

又总能量：$W = W_m + W_e$

$$W_m = \pi R^2 L\cdot\frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\pi\mu_0\sigma_e^2 R^4 L\beta^2 t^2$$

$$W_e = \pi R^2 L \cdot \frac{1}{2} DE = \frac{1}{8} \pi \varepsilon_0 \mu_0^2 L \sigma_e^2 R^6 \beta^2$$

总电磁能的变化率：$\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{dW_m}{dt} = \pi \mu_0 \sigma_e^2 R^4 L \beta^2 t$

7. （20 分）若有下列谱项：$^2S_{1/2}$，$^1P_1$，$^3D_2$ 及 $^1F_3$，试阐明：

（1）弱磁场中哪些谱项的磁能级成分之间的间隔有最大值；

（2）对于哪些谱项，相应的有效磁矩能够按如下的公式计算：$\mu_J = \mu_B \sqrt{J(J+1)}$。

解：由 $g = 1 + \dfrac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$ （4 分），得：

$^2S_{1/2}$，$^1P_1$，$^3D_2$ 及 $^1F_3$ 各谱项的 g 因子分别为：$g_S=2$，$g_P=1$，$g_D=7/6$，$g_F=1$ （6 分）

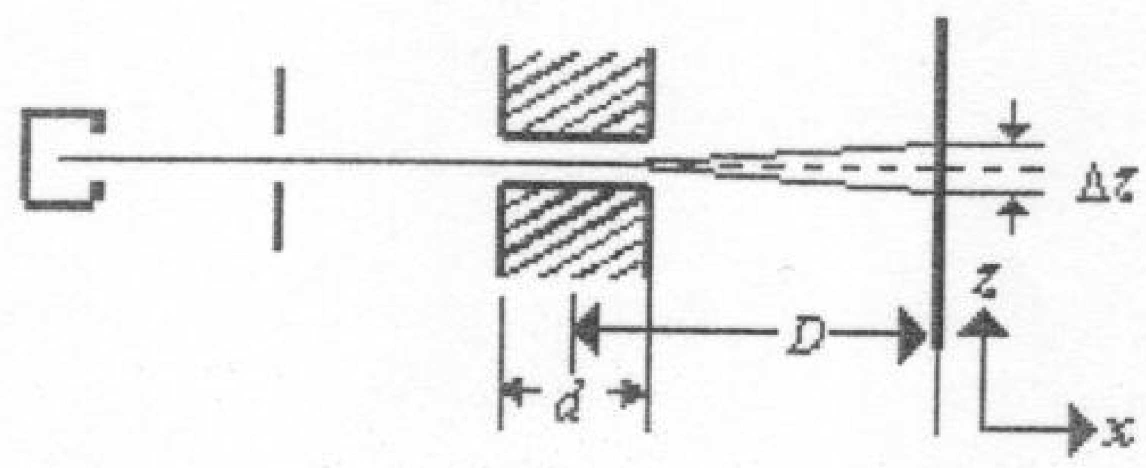
（1）因为谱项裂矩为 $g\mu_B B$，所以具有较大 g 因子的谱项磁裂矩最大，即 $^2S_{1/2}$ 裂矩最大.（4 分）

（2）$\because \mu_J = g\sqrt{J(J+1)}\mu_B$ （2 分）

$\therefore$ 只有对于 g=1 的谱项，μ_J 才能写成：$\mu_J = \mu_B \sqrt{J(J+1)}$ （2 分）

$\therefore$ $^1P_1$ 及 $^1F_3$ 的有效磁矩能写成上式的形式。 （2 分）

8. （20 分）在斯特恩—盖拉赫实验中，极不均匀的横向（z 方向）磁场梯度为 $\dfrac{\partial B_z}{\partial z} = 10\ \mathrm{T/cm}$，磁极的纵向长度 d = 4 cm，磁极中心到屏的长度 D=10 cm（如图所示），在屏上两束分开的距离 Δz = 0.002 m。使用的原子束是处于基态的银原子，原子速度 v = 500 m/s。试求原子磁矩在磁场方向上投影 μ_z 大小。磁场边缘的影响忽略不计。



题 8 图

解：原子通过 d 和 D 的时间 $t_1 = d/v$，$t_2 = D/v$ （4 分）

通过 d 段时原子受力 $f_z = \mu_z \times \partial B/\partial z$，方向因 μ_z 方向的不同而不同，或者向上或者向下。（3 分）

Z 方向原子的加速度 $a_z = f_z/m$ （3 分）

刚脱离磁场时刻 原子 z 方向的瞬时速度 $v_z = a_z \times t_1$ （4 分）

原子在 z 方向的偏转位移 $\Delta z/2 = 1/2 \times a_z \times t_1^2 + v_z \times t_2$ （4 分）

代入数值计算得 $\mu_z = 1.007\ \mu_B = 9.335 \times 10^{-24}$ J/T （2 分）