

## 2010 年中国科学技术大学 623 数学分析考研试题（回忆版）

本试题由 kaoyan.com 网友 zhouheng1212 提供

- 1,  $f(x)$  无穷区间上一致连续,  $0 < a < 1$ , 证明  $f^a(x)$  也一致连续.
- 2,  $f(x, y)$  在除原点以外的地方都可微, 在  $\mathbb{R}^2$  上连续, 他的两个偏导数在原点的极限都存在, 且为零. 证明其在原点有极限.
- 3, 具体记不起来了, 只记得是说一个抽象函数  $f(x)$  的和  $e^x$  在一起的曲线积分, 说它路径无关, 求他的值.
- 4, 一个二次递推数列求极限的问题,  $x_0$  属于从 1 到  $3/2$  的开区间,  $x_{n+1} = x_n^{1/2} + x_n^{-1/2}$ .
- 5, 计算一个在椭球面的上半面的曲面积分  $x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$ .
- 6, 证明含参广义积分  $\arctan(tx)/t^a$  在  $(0, +\infty)$  上定义了一个可微函数  $f(x)$ , 然后证明  $x df(x)/dx + (1-a)f(x) + \arctan x = 0$ .
- 7, 设有一个周期是  $2\pi$  的连续可导的奇函数  $f$ , 且  $df(x)/dx = f(\pi/2 - x)$ , 求这个函数.
- 8, 正项级数  $a_n$  收敛, 证明  $a_n^{1-1/n}$  也收敛.
- 9, 有正项数列  $a_n, b_n$ , 且  $b_n/n$  的极限是 0,  $b_n(a_n/a_{n+1} - 1)$  有大于 0 的极限, 证明  $a_n$  的极限为 0, 且其收敛.
- 10, 忘了.

### 数学分析

注意【】符号为处理上下标所用

一 设函数  $f(x): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  一致连续,  $\alpha$  属于  $(0, 1]$ , 求证: 函数  $g(x) =$

$[f^\alpha](x)$  也在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

二 设  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上可微, 在  $(0, 0)$  处连续, 且  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$ . 求证  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微.

三 设  $x_0$  属于  $(1, 3/2)$ ,  $x_1 = (x_0)^2$ ,  $x_{n+1} = (x_n)^{1/2} + [x_{n-1}]^{1/2}$ ,  $n=1, 2, \dots$  求证

:  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

四 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上有连续导函数,  $f(0)=0$ , 且曲线积分  $\int_C (e^x + f(x))y dx + f(x) dy$

与路径无关, 求  $\int_{(0,0) \rightarrow (1,1)} (e^x + f(x))y dx + f(x) dy$

五 设  $\alpha > 1$ , 求证, 以下含参变量  $x$  的无穷积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t^\alpha} dt$ , 定

义了  $(0, +\infty)$  上的一个可微函数, 且满足  $xf'(x) - (\alpha - 1)f(x) + \arctan(x) = 0$

六 设  $a, b, c$  都是正数, 计算曲面积分  $\int_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$ , 其中  $S$  是上

半椭圆面  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, z \geq 0$ , 方向朝上

七 设  $f(x)$  是定义在实轴上以  $2\pi$  为周期的奇函数, 又  $f(x)$  有连续的导函数且满足  $f'(x) =$

$f(\pi/2 - x)$ , 试求  $f(x)$

八 设  $\sum_{n=1, +\infty} a_n$  是一个收敛的正项级数, 求证:  $\sum_{n=1, +\infty} (a_n)^{1-1/n}$

$(a_n)^{1-1/n}$  也收敛。

九 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上二阶可导,  $f(0) \geq 0, f'(0) \geq 0$ , 且满足

$f(x) \leq f''(x)$ , 求

证:  $f(x) \geq f(0) + f'(0)x$

十 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都是正数列, 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)/n = 0$ , 及  $\lim_{n \rightarrow \infty}$

无穷

$b_n((a_n/a_{n+1}) - 1) = \gamma > 0$

求证: (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (2) 级数  $\sum_{n=1, +\infty} a_n$  收敛

以上试题来自 kaoyan.com 网友的回忆, 仅供参考, 纠错请发邮件至 suggest@kaoyan.com。