中国科学技术大学

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（线性代数与解析几何）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不得使用计算器

一、 填空题 (每空5分, 共60分)

1 二次曲线$x^2-4xy+y^2+10x-10y+21=0$的类型是________________，通过转轴去掉其交叉项的转角角度是________________ (只需要填写一个角度即可).

2 以曲线$\begin{cases} y=x^2 \\ z=2 \end{cases}$为准线, 原点为顶点的锥面方程为 ________________.

3 以xOy平面上的曲线$f(x,y)=0$绕x轴旋转所得的旋转面的方程是________________. 如果曲线方程是$x^2-y^2-1=0$, 由此得到的曲面类型 是________________.

4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性空间V中4个线性无关的向量, 则向量组$\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_4+\alpha_1$的秩等于________________.

5 在3维实向量空间$\mathbb{R}^3$中, 设 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-1,0)^T$, $\alpha_3=(1,0,-1)^T$, $\beta=(-4,3,4)^T$. 则β在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的坐标是________________.

6 设$n>2$, 则$\det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ a_1+b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+b_n & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{pmatrix}$等于________________.

7 设$n>1$, 矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ -1 & 0 & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$, 则$A$的特征多项式是________________.

8 λ-矩阵$\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda & \lambda^2-1 \\ 3\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2-1 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$的Smith标准型是________________.

9 用Gram-Schmidt正交化方法将$\mathbb{R}^3$ (标准内积)的基$\{(1,1,1)^T,(-1,0,-1)^T,(-1,2,3)^T\}$化成的标准正交基是________________.

10 定义所有n阶实方阵构成的实线性空间V 上的对称双线性函数为$f(X,Y) = \mathrm{Tr}(X^TY)$, $X, Y \in V$, 二次型为$Q(X) = f(X,X)$. 则$Q(X)$ 的正, 负惯性指数分别为 ________.

二、 (10分) 求如下线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=5 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

三、 (15分) 设空间上有直线$l_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$和$l_2: (x,y,z)=(3+2t,t,3t-3)$. 设平面$\pi$与直线$l_1$, l_2平行, 且π与l_1的距离是$\sqrt{91}$, 求π的方程.

四、 (10分) 设$\mathscr{A}: U \to V$为数域F上的线性空间U到V上线性映射. 证明:

$$\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A} + \dim \mathrm{Im}\mathscr{A} = \dim U.$$

五、 (15分) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求方阵$P$, 使得$P^{-1}AP$为$A$的Jordan标准形.

六、 (10分) 证明酉方阵的特征值模长为1.

七、 (10分) 设V是n维欧氏空间, (,)为其内积, V^*为其对偶空间. 证明

(1) 对于每个给定的$\alpha \in V$, 映射$f_\alpha: V \to \mathbb{R}, \beta \mapsto (\alpha,\beta)$ 是V^*中的一个元素.

(2). 映射$f: V \to V^*, \alpha \mapsto f_\alpha$是$n$维线性空间$V$到$V^*$的同构映射.

八、 (20分) 设数域F上有限维空间V上线性变换$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$满足 $\mathscr{A}\mathscr{B} = a\mathscr{B}\mathscr{A}$ $(a \in F,\ a \neq 1)$, 且$\mathscr{A}$是可逆线性变换, 证明

(1) $\mathscr{B}$为幂零变换 (即存在正整数n, $\mathscr{B}^n = 0$).

(2) $\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$有一个公共特征向量.