中国科学技术大学

2010年硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：管理综合 C

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效；不使用计算器.

第一部分　统计学（ 75 分）

一、简答题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 设 X 和 Y 为两个随机变量，满足 $\mathrm{P}(X=0)=1/4=1-\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(Y=0)=1/2=\mathrm{P}(Y=1)$ 且 $\mathrm{Cov}(X,Y)=1/8$, 求 (X,Y) 联合概率函数.

2. 设 X,Y 为两个随机变量，满足 $\mathrm{Var}(X+Y)=3$, $\mathrm{Var}(X-Y)=1$, $\mathrm{E}X=1$ 和 $\mathrm{E}Y=2$, 求 $\mathrm{E}(XY)$.

3. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是从正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$ 中抽出的一组容量 n 的样本，其中 θ、σ^2 未知. 记 $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 问 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2-n(\overline{X}_n-\theta)^2$ 是否为一个统计量？

4. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是从 $N(\mu,\sigma^2)$ 总体中取出的一组简单样本，其中 σ^2 已知，考虑 μ 的置信系数 $1-\alpha$ 的置信区间. 现在 (i) 固定 n, 提高置信度； (ii) 固定置信度，增大 n, 那么该置信区间的长度在 (i) 、 (ii) 之下分别是增大还是减小？

二、样本分布（共 10 分）

设 $X_1,\ldots,X_9$ 和 $Y_1,\ldots,Y_5$ 分别是从正态总体 $N(0,4)$ 和 $N(8,9)$ 取出的一组简单样本 (即 iid 样本), 彼此相互独立，记 $\overline{Y}=\sum_{j=1}^{5}Y_j/5$, 试确定统计量

$$T=\frac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{5}(Y_j-\overline{Y})^2}}$$

服从的分布.

三、参数估计（（每小题 10 分，共 30 分））

1. 设 X_1, X_2, X_3 和 X_4 是从下面的离散分布中抽出的一组简单样本

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\theta^{2x}e^{-\theta^2}/x!, & \text{当 } x=0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$. 如果观测值为 17, 10, 32 和 5, 求 θ 的极大似然估计.

2. 设总体 $X\sim N(\mu,16)$, X 的一个样本大小为 9 的样本如下：$3,4,5,6,6,7,7,8,8$, 查表 $t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.05}(8)=1.860$, $u_{0.025}=1.96$, $u_{0.05}=1.645$, 求均值 μ 的 95% 置信区间.

3. 设 $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ 是未知参数 θ 的两个独立无偏估计量，已知 $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_1)=4\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_2)$, 求 k_1 和 k_2 使得 $k_1\widehat{\theta}_1+k_2\widehat{\theta}_2$ 仍为 θ 的无偏估计，且使 $k_1\widehat{\theta}_1+k_2\widehat{\theta}_2$ 的方差达到最小.

四、假设检验（ 11 分）

设容量为 1 的样本 X 的概率密度为

$$f(x)=(1+\theta)x^{\theta},\ \ 0<x<1,\ \theta>0.$$

考虑检验问题 $H_0:\theta=5\longleftrightarrow H_1:\theta=3$. 该检验的否定域为 $X>1/2$. 求该检验犯第一型错误和犯第二型错误的概率.

第二部分:运筹学（75 分）

一、　判断下面的说法是否正确（正确的打√，不正确的打×）（10 分）

1. 任何线性规划问题都有唯一的对偶问题;
2. 线性规划问题的每一个基本可行解对应着其可行域上的一个顶点;
3. 若线性规划问题存在最优解，那么最优解一定只在其可行域的顶点处取得;
4. 当线性规划的原问题具有无界解时，其对偶问题无可行解，反之亦然;
5. 在用单纯形法求解目标函数为最大化的线性规划问题时，选取最大的正检验数σ_k所对应的变量x_k作为换入变量，将使得目标函数得到最快的增长;
6. 在单纯形法计算中，如果不按最小θ比值规则选取换出变量，则在下一个解中至少有一个基变量的值为负值;
7. 若线性规划问题有基本可行解，则必有最优解;
8. 指派问题的效益矩阵$[C_{ij}]_{n\times n}$中的每一个元素都乘上一个常数$k>0$，将不会影响最优指派方案的求解;
9. 动态规划是一种研究多目标决策问题的最优化理论和方法;
10. 对于取值为无约束的变量 X_j，通常令 $X_j=X_j'-X_j''$，其中 $X_j'\geqslant o$，$X_j''\geqslant 0$。在用单纯形法求得的最优解中有可能同时出观 $X_j'>0$，$X_j''>0$。

二、如果某线性规划问题在其可行域的两个可行点处同时取得最优解，试证明：该线性规划问题有无穷多个最优解。（10 分）

三、设有线性规划问题：（25 分）

$$\mathit{M}\text{ax}\, Z=2x_1-5x_2+3x_3$$

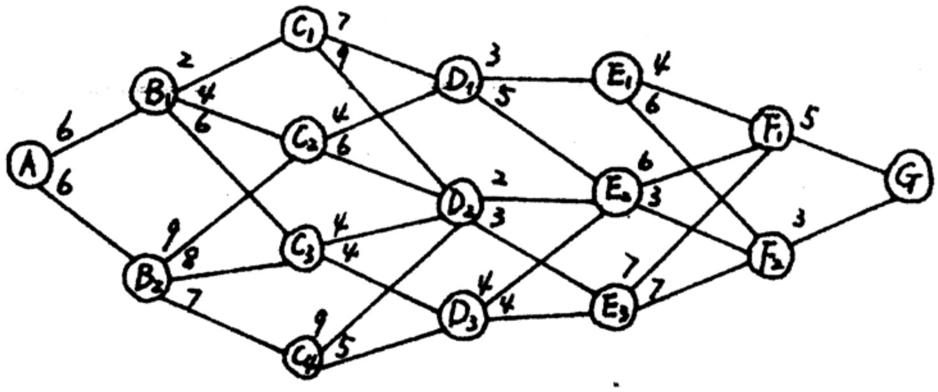
$$s.t.\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3\geq 10\dfrac{5}{7}\\ x_1+x_2+x_3=7\dfrac{5}{7}\\ x_1\geq 0;x_2\geq\dfrac{5}{7};x_3\geq 0\end{cases}$$

试求：（1）该问题的最优解；

（2）若目标函数中 x_1 的系数由 2 变为 2＋θ，试讨论最优解的变化;

（3）在保持现行最优基不变的前提下，假如要把一个约束条件的右端扩大，应扩大哪一个更有利？

四、在以下的线路网络中，两点之间连线上的数字表示两点之间的距离(公里)，试用动态规划的方法求出起点 A 到终点 G 的最短路线和最短路程。(10 分)



五、设有线性规划问题如下：

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leqslant 8 & ① \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 & ② \\ x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 6 & ③ \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 9 & ④ \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0;\ (j=1.2.3.4)$$

已知该线性规划问题最优解为 $X^*=[2.2.4.0]^T$,试用对偶理论直接求出对偶问题的最优解 Y^*。(10 分)

六. 一个公司要分派 5 个推销员去 5 个地区推销某种产品，5 个推销员在各个地区推销这种产品的预期利润如下表所示。问应如何分派这 5 个推销员才能使公司的总利润为最大？(10 分)

推销员 \ 地区	A	B	C	D	E
甲	25	20	22	20	22
乙	16	22	19	19	19
丙	20	30	25	27	23
丁	28	27	19	19	23
戊	17	23	20	23	22