

中国科学技术大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

(概率论与数理统计)

所有试题解答写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

■ 不使用计算器

一、计算题 (说理要充分。每小题 8 分, 共 96 分)

1. 设 A, B 为两个事件且 $P(B) > 0$, 说明下面两个不等式是否正确:

$$P(A|B) \geq 1 - \frac{P(A^c)}{P(B)}, \quad P(A|B) \leq 1 - \frac{P(A^c) - P(B^c)}{P(B)}.$$

2. 1000 枚硬币里有一个硬币两面都是国徽, 其它的硬币都是一面是国徽, 一面是数字. 如果你从中选出了一个硬币, 随机掷了 10 次, 结果全部都是国徽, 有人认为这个硬币是那个两面都是国徽的概率要明显大约 50%, 你认为对吗? 真实的概率应为多少?
3. 如果有 3 个门, 有一个背后有大奖. 你选中一个, 主持人知道哪个门后面有奖, 并且总会打开另外两个中的某个没奖的. 现在你有一次换的机会, 你应该选择换, 不换还是换不换都一样? 并说明理由.
4. 考虑 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个随机排列, 与原来位置序号相同的数字的个数记为 X (如当 $n = 6$ 时, 排列 513246 与原来位置序号只有数字 3 和 6 是相同的, 所以 $X = 2$), 则 X 的期望值是多少?
5. 一顾客 A 于时刻 T 到达一个服务台, 其中 T 服从均值 $1/2$ 的指数分布. 若给定顾客于任意时刻 s 到达服务台, 则该顾客能够得到满意服务的概率为 $p(s) = e^{-2s}$. 问顾客 A 能够得到满意服务的概率是多少?
6. 在区间 $(0, 2)$ 上随机取 n 个点 ($n \geq 2$), 求离区间两端最接近的两点之间的期望距离.
7. 设 X, Y, Z 相互独立, 其中 $X \sim N(2, 4\sigma^2)$, $Y \sim N(0, \sigma^2)$, $Z \sim N(2, \sigma^2)$, 求常数 k 使得 W 具有自由度分别为 1 和 2 的 F -分布, 其中

$$W = \frac{k(X-2)^2}{Y^2 + (Z-2)^2}.$$

8. 如果一条广告说, 某种药品的有效率为 80%, 其误差为正负 3%, 那么这条广告给出了什么信息? 你相信这条广告吗? 这条广告隐瞒了什么信息?

9. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 为取自一总体的随机样本, 该总体的概率密度函数为

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

当 $x < 0$ 时, $f_{\theta}(x) = 0$. 求 θ 的矩估计和极大似然估计.

10. 基于一组样本考虑假设检验问题 $H_0: \theta = 0 \longleftrightarrow H_1: \theta = 1$, 其中 θ 是总体未知参数, 检验统计量为 W , 否定域为 $W > 1.6$. 已知当 H_0 正确时, $W \sim N(0, 1)$; 当 H_1 正确时, $W \sim N(4, 9)$. 求该检验的一型和二型错误的概率 (用标准正态分布的分布函数表达).

11. 一个工厂考虑如下的检验问题 $H_0: p \leq 0.1 \longleftrightarrow H_1: p > 0.1$, 其中 p 是该工厂生产的一批元件的废品率. 先随机抽取两个元件检测, 如果这两个皆是废品, 则拒绝 H_0 ; 否则, 再抽取第 3 个元件检测, 若该元件为废品, 则拒绝 H_0 . 在其它情形下, 接受 H_0 . 求该检验的功效函数和真实检验水平.

12. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 共同分布的概率密度函数为 $f(x) = ce^{-c(x-a)}$, $x > a$, 其中 $c > 0$ 为常数. 记 $W_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, 试问 W_n 在依概率意义下收敛吗? 并求极限.

二、(18 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从标准正态总体取出的一组随机样本, 证明 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 与 $\{X_1^2/\sum_{i=1}^n X_i^2, \dots, X_n^2/\sum_{i=1}^n X_i^2\}$ 相互独立.

三、(18 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的一组随机样本, $p \in [0, 1]$ 为未知参数. (1) 求充分完备统计量; (2) 求 $g(p) = p(1-p)$ 的最小方差无偏估计.

四、(18 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从正态总体 $N(\theta, 4)$ 取出的一组随机样本, 求检验问题 $H_0: \theta \leq 2 \longleftrightarrow H_1: \theta > 2$ 的水平 α 的一致最优检验.