

中国科学技术大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

(线性代数与解析几何)

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效, 不得使用计算器

一、填空题 (每小题 5 分, 共 50 分)

1. 两个平面 $z = x + 2y$ 和 $z = -2x - y$ 的夹角等于 ①。

2. 点 $(0, 2, 1)$ 到平面 $2x - 3y + 6z = 1$ 的距离等于 ②。

3. 二次曲面 $xy + z^2 = 1$ 的曲面类型是 ③。

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$ ④。

5. 设 V 是由 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 生成的 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间, 则 $\dim V =$ ⑤。

6. 已知实线性空间 V 中的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组 $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1\}$ 的秩等于 ⑥。

7. 已知实方阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ ⑦。

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 \end{pmatrix}$ 的初等因子组是 ⑧。

对 \mathbb{R}^4 中的向量 $\alpha_1 = (1,0,1,0)$, $\alpha_2 = (0,-1,1,-1)$, $\alpha_3 = (1,1,1,1)$ 作 Gram-Schmidt 正交化和单位化, 得到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 则 $\beta_3 = \underline{\text{⑨}}$ 。

10. 已知实二次型 $Q(x, y, z) = ax^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ 正定, 则实数 a 的取值范围是 ⑩。

二、解答题 (共 100 分, 请给出详细的计算和证明过程)

11. (15 分) 设点 $A(1,1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,1,1)$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程。

12. (15 分) 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$
 的通解。

13. (15 分) 设 n 阶复方阵 A 的特征值全体为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $f(x)$ 是任意一个复系数多项式。求证: $f(A)$ 的特征值全体为 $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$ 。

14. (15 分) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是欧氏空间 V 中任意 n 个向量, $n \geq 1$,

$$G = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}, \text{ 其中 } (\alpha_i, \alpha_j) \text{ 是 } V \text{ 的内积。}$$

求证: G 正定的充分必要条件是 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关。

15. (20 分) 设 \mathcal{A} 是无限维线性空间 V 的线性变换, \mathcal{B} 是 \mathcal{A} 在 $\text{Im } \mathcal{A}$ 上的限制变换。求证: $V = \text{Im } \mathcal{A} \oplus \text{Ker } \mathcal{A}$ 的充分必要条件是 \mathcal{B} 可逆。

16. (20 分) 已知 \mathbb{R}^2 的线性变换 \mathcal{A} 把 $(1,0)$ 映射到 $(0,1)$, 把 $(0,1)$ 映射到 $(2,1)$, 并且把圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 映射成椭圆 E 。求: (1) E 的方程; (2) E 的长轴所在直线的方程; (3) E 的面积。