中国科学技术大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

（高等数学 B）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

□需使用计算器　　　　□不使用计算器

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\sqrt{n+\frac{1}{2}}=$ ________；

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}=$ ________；

3. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$，则 $F'(x)$= ________；

4. 曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是 ________；

5. 设 $z=ln(x^2+y^2)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________；

二、选择题 （每题 5 分，共 25 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ________；

（A）收敛但不连续　　　（B）连续但不可导

（C）连续且可导　　　　（D）可导但不连续

2. 设 $\ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则不定积分 $\int xf'(x)dx$= ________；

（A）$1+\ln x+c$　　　（B）$x\ln x-\dfrac{1}{x}+c$

（C） $x\ln x+\dfrac{1}{x}+c$　　　　　（D） $1-\ln x+c$

3. 设函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$，则$f(x,y)$有________________；

（A）极大 $f(2,-2)=8$　　　　（B）极大 $f(2,2)=-8$

（C）极小 $f(2,-2)=8$　　　　（D）极小 $f(2,2)=-8$

4. 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}-1})$ ____________________；

（A）绝对收敛　　　　（B）条件收敛

（C）发散　　　　　　（D）不能确定

5. 通过z轴且与平面$x-2y+5=0$垂直的平面方程是______________；

（A） $2x-y=0$　　　　（B） $x-2y=0$

（C） $2x+y=0$　　　　（D） $x+2y=0$

三、（8分） 求 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间与极值.

四、（7分） 计算定积分$\int_0^1 e^{3\sqrt{x}}dx$.

五、（10分） 设 $f(x)=x^2\ln(x+1)$，求 $f^{(n)}(0)$.

六、（10分） 设 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，其中 f 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

七、（10分） 证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$，$x>0$.

八、（10分） 计算累次积分$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(x+y)dy$ 之值.

九、（10 分）求微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解.

十、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛区间及和函数.

十一、（15 分）设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n, (n = 1, 2, \ldots)$

（I）　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其极限；

（II）　计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$；

（III）　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$.

十二、（10 分）设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，又$\phi(x) = f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调递减，证明：$f(x) \equiv 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$.