中国科学技术大学

2012 年硕士学位研究生入学考试试题

（线性代数与解析几何）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不得使用计算器

一、填空题（每空 5 分，共 50 分）

1．在$\mathbb{R}^3$中，直线$x=y=z$与平面$z=x-y$的夹角的余弦值等于___①___．

2．在$\mathbb{R}^3$中，方程$xy-yz+zx=1$所表示的二次曲面类型为___②___．

3．在$\mathbb{R}^4$中，设三点A,B,C的坐标分别为$A(1,0,1,0)$，$B(0,1,0,1)$，$C(1,1,1,1)$，则$\triangle ABC$的面积等于___③___．

4．满足$f(-1)=0$，$f(1)=4$，$f(2)=3$，$f(3)=16$的次数最小的一元多项式$f(x)=$___④___．

5．使线性方程组$\begin{cases} a^2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+x_3=a^2 \end{cases}$有解的实数$a$的取值范围是___⑤___．

6．已知实方阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$A=$___⑥___．

7．已知复方阵A的特征方阵$\lambda I-A$的初等因子组为

$$\{\lambda,\ \lambda+1,\ \lambda^2,\ \lambda^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3\},$$

则A的最小多项式$d_A(\lambda)=$___⑦___，$\operatorname{rank} A=$___⑧___，$\operatorname{tr} A=$___⑨___．

8．设$n\geq 2$，则实二次型$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$的规范型为___⑩___．

二、解答题（共 100 分，需给出详细的计算和证明过程）

9.（15 分）求$\mathbb{R}^3$中直线$x-1=y-2=z-3$与$x=2y=3z$的公垂线方程.

10.（15 分）已知W_1,W_2是数域F上n维线性空间V的两个子空间.
求证：$\dim(W_1\cap W_2)+\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$.

11.（20 分）设$\mathscr{A}$是数域F上n维线性空间V的线性变换．已知$\mathscr{A}$的特征多项式$\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda)=f(\lambda)\cdot g(\lambda)$，其中$f(\lambda)$与$g(\lambda)$是数域$F$上的两个互素的多项式．求证：
（1）$\operatorname{Im} f(\mathscr{A})=\operatorname{Ker} g(\mathscr{A})$；（2）$V=\operatorname{Im} f(\mathscr{A})\oplus\operatorname{Im} g(\mathscr{A})$.

12.（15 分）设$Q(\mathbf{x})$是n元实二次型，$V=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid Q(\mathbf{x})=0\}$.
求证：V是$\mathbb{R}^n$的子空间$\Leftrightarrow$ $Q(\mathbf{x})$是半正定或半负定的.

13.（20 分）设$\mathbb{R}^{2\times2}$上的线性变换$\mathscr{A}(X)=AX-XA$，其中$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.
（1）求证$f(X,Y)=\operatorname{tr}(X^TAY)$是$\mathbb{R}^{2\times2}$上的内积；
（2）求$\operatorname{Im}\mathscr{A}$在$f$下的一组标准正交基.

14.（15 分）设$n\geq 2$，求如下n阶实方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的 Jordan 标准形.

$$A=\begin{pmatrix}O & & 1 & 1\\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & \iddots & & \\ 1 & & & O\end{pmatrix},\ 即\ a_{ij}=\begin{cases}1, & i+j\in\{n,n+1\};\\ 0, & i+j\notin\{n,n+1\}.\end{cases}$$