中国科学技术大学

2012 年硕士学位研究生入学考试试题

(概率论与数理统计)

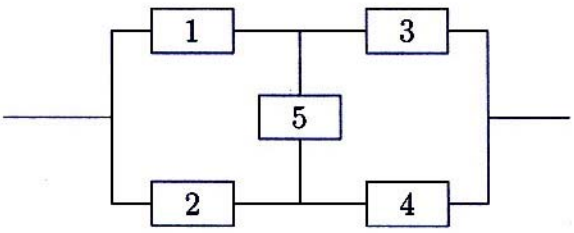
所有试题解答写在答题纸上，答案写在试卷上无效

■ 不使用计算器

一、计算题 (说理要充分. 每小题 8 分，共 96 分)

1. 设 A, B 为两个事件，满足 $\mathrm{P}(A|B) = 0.7$, $\mathrm{P}(B|A) = 0.2$, $\mathrm{P}(B^c|A^c) = 0.8$, 求 $\mathrm{P}(A \cup B)$.

2. 求下图所示的桥型系统能正常工作的概率，其中框图中的数字代表元件编号，这些元件独立地工作， 5 个元件能正常工作的概率皆为 p.



3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其中 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布， Y 分别以概率 1/3 和 2/3 分别取 1 和 3. 问 $X+Y$ 具有概率密度吗？若有，请求出该概率密度函数.

4. 将 A 、B 、C 三个字母之一输入信道，输出原字母的概率为 α, 而输出其它任一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$. 现将字母串 AAA 、 BBB 、 CCC 之一输入信道，输入 AAA 、 BBB 、 CCC 的概率分别为 0.4, 0.3, 0.3. 已知输出为 ABC，问输入的是 AAA 概率是多少？（假设信道传输每个字母的工作是独立的）

5. 设 (X, Y) 服从二维正态分布，其边际分布为 $X \sim N(4,1)$, $Y \sim N(6,99)$, 求概率 $\mathrm{P}(X+Y \leq 10)$.

6. 设 X 以概率 p 服从 $N(0,1)$ 分布，以概率 $1-p$ 服从 $N(1,1)$ 分布，求 $\mathrm{E}X$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且皆服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数，其中 α,β 为常数.

8. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是一个简单随机样本, $\mathrm{E}\,X=\mu$, $\mathrm{Var}\,(X)=\sigma^2$, $\widehat{\theta^2}=c\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-X_{i+1})^2$ 为 σ^2 的无偏估计，求 c.

9. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_5$ 是抽自密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$, $-\infty<x<\infty$, 的总体的简单随机样本， $X_{(1)}<X_{(2)}<\cdots<X_{(5)}$ 为次序统计量，求 θ 的极大似然估计.

10. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{10},X_{11}$ 独立同分布，共同的分布为 $N(\mu,\sigma^2)$. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i,\quad S^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2,\quad Y=\frac{k(\overline{X}-X_{11})}{S}.$$

求 k 的值使 Y 服从 $t-$ 分布 (给出详细证明，并指出 $t-$ 分布的自由度).

11. 参数的极大似然估计唯一吗？若不唯一，请举例说明.

12. 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为 iid 随机变量序列, $\mathrm{E}\,X_1=a$ 有限, 求 $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$.

二、**(18 分)** 设 (X,Y) 服从以 $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ 为顶点的三角形区域上的均匀分布，求 (1) X 的边际概率密度； (2) 求 $U=X+Y$ 的概率密度； (3) 求 U 的方差.

三、**(24 分)** 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是从参数 λ 的 Poisson 分布总体中抽取的一组随机样本, λ 未知. (1) 求 λ 的充分完备统计量； (2) 求 $g_1(\lambda)=\lambda^3$ 的最小方差无偏估计； (3) 求 $g_2(\lambda)=\mathrm{P}\,(X_1=2)$ 的最小方差无偏估计； (4) 对显著性水平 α, 求检验问题 $H_0:\lambda\geq 1\longleftrightarrow H_1:\lambda<1$ 的一致最优检验.

四、**(12 分)** 设学校某次考试考生的成绩服从正态分布，从中随机抽出 36 位考生的成绩，算得平均成绩 66.5 分，标准差为 15. 问在显著水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？给出检验全过程.

附 t 分布表： $t_p(n)$ 表示自由度为 n 的 t 分布的 p 分位点.

$$t_{0.95}(35)=1.6896,\quad t_{0.975}(35)=2.0301,$$
$$t_{0.95}(36)=1.6883,\quad t_{0.975}(36)=2.0281.$$