中国科学技术大学

2012年硕士学位研究生入学考试试题

分析与代数

所有试题答案写在答题纸上, 答案写在试卷上无效

不使用计算器

一、计算(8分+7分+8分+9分, 共32分)

1. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin^{2009}x}{x^{2012}};\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}k^p-\frac{n}{p+1}\Big),\ \text{其中}p>0.$$

2. 试求函数$f(x)=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$的$n$阶导函数$f^{(n)}(x)$.

3. 分别求下列的不定积分和定积分:

$$\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx;\quad \int_0^1(t\ln t)^2dt.$$

4. 设二元函数$f(x,y)$所有二阶偏导数均连续, 且

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\quad f(x,3x)=x,\quad f'_x(x,3x)=x^3.$$

试求函数f在点$(x,3x)$处的所有二阶偏导数.

二、(16分) 设函数$f(x)$在闭区间I上连续且为严格凸函数.

(1) 证明函数f在I上具有唯一的极小值点;

(2) 函数f在I上具有唯一的极大值点吗? 请说明你的结论.

三、(16分) 求$x>0,y>0,z>0$时函数$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+4\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=7r^2$上的最大值, 其中$r>0$为一常数. 并由此证明当$a,b,c$为正实数时, 有

$$ab^2c^4\le 1024\Big(\frac{a+b+c}{7}\Big)^7.$$

四、(16分) 设Ω为四条平面曲线$xy=1, xy=5, y^2=x, y^2=2x$所围成的有界闭区域, 试求积分

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{6x}{y^2+xy^3}dxdy.$$

五、(17分) 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) 实数x, y, z满足什么关系时, 方程$\mathbf{Ax}=0$只有零解;

(2) 实数x, y, z满足什么关系时, 方程$\mathbf{Ax}=0$有无穷多组解, 并求出通解.

六、(17分) 设n阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的所有特征值均非负. 对任意给定的正整数$k\geq 2$, 证明存在一个实对称矩阵$\mathbf{B}$, 使得$\mathbf{A}=\mathbf{B}^k$.

七、(18分) 设方阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^2=2\mathbf{A}$, 且$\mathbf{I}$为与$\mathbf{A}$同阶的单位阵. 对任意正整数k, 试证明方阵$\mathbf{A}+k\mathbf{I}$可逆, 并求其逆矩阵.

八、(18分) 设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{B}$, 其中$\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵. 且记$\mathbf{I}$为3阶单位阵.

(1) 求矩阵$\mathbf{C}$及其行列式$|\mathbf{C}|$;

(2) 求矩阵$\mathbf{C}+2\mathbf{I}$的特征值;

(3) 问矩阵$\mathbf{C}+2\mathbf{I}$可否对角化? 为什么?