★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

1、（15 分）设 $x_i \neq 0,(i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_i (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}).$$

2、（15 分）设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，证明：若方程 $f(x)=0$ 有 $n+1$ 个不同的根，则 $f(x)\equiv 0$.

3、（15 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为可逆矩阵，证明：矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 可逆，且有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

4、（15 分）设 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_n}$ 为一组 n 维向量，证明：向量组 $\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_n}$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量均可由它们线性表示。

5、（15 分）已知向量组

$$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix},$$

（1） 当 a,b 为何值时，$\vec{\beta}$ 不能表示成 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 的线性组合？

（2） 当 a,b 为何值时，$\vec{\beta}$ 能够由 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 唯一地线性表示？并求出表示式。

6、（15 分）证明实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正数。

7、（15 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 可经正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化为标准型 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的值及正交变换阵 $\boldsymbol{P}$.

8、（15 分）设 $f(x),g(x),h(x)$ 为数域 $\boldsymbol{F}$ 上多项式，证明：$(f(x),g(x)h(x))=1$ 的充分必要条件是 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$.

9、（15 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 $\boldsymbol{F}$ 上两个 n 阶矩阵，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们对应的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 等价。

10、（15 分）设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的子空间，证明：下列维数公式

$$\text{维}\left(\sum_{i=1}^{m}V_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\text{维}\ (V_i)-\sum_{i=2}^{m}\text{维}\left(V_i\cap\sum_{k=1}^{i-1}V_k\right).$$