★★★答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★

一、填空题:（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（1） 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{x}\sin\pi x(x>0) \\ a+x^2(x\le 0)\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

（2） 微分 $de^{\sin^2(1-x)}=$____________ $d\cos 2(1-x)$.

（3） 定积分 $\int_0^1 \arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}dx=$________________________.

（4） 不定积分 $\int\dfrac{2^{x-1}}{\sqrt{1-2^x}}dx=$________________________.

（5） 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy-\sin(\pi y^2)=0$ 所确定，则 $y'|_{y=1}=$_________.

（6） 已知二阶常系数线性非齐次方程 $y''-3y'+4y=2e^{-x}$，则其特解结构 $y^*=$______________________________.（不必计算）

二、单项选择题:（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（7） 已知 $f(x)$ 满足 $f'(x_0)<0, f''(x)<0$，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$dy=f'(x_0)\Delta x$，当 $\Delta x>0$ 且充分小时，有（　　）.

（A）$\Delta y>dy>0$　（B）$dy>\Delta y>0$　（C）$\Delta y<dy<0$　（D）$dy<\Delta y<0$

（8） 曲线 $y=\dfrac{2x^4-5x^3+x^2+1}{x^2(x-1)}$ 的渐近线共有（　　）条.

（A）零　（B）一　（C）二　（D）三

（9） 函数 $f(x)=x(x+1)|x^3-x^2-2x|$ 的不可导点有（　　）个

（A）零　（B）一　（C）二　（D）三

（10）若 $f(x)>g(x)$，且在 R 上可微，则下列（　　）式必成立.

（A）$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\ge\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$　（B）$f'(x)\ge g'(x)$

（C）$df(x)\ge dg(x)$　（D）$\int_0^x f(t)dt\ge\int_0^x g(t)dt$

（11） 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，则（　　）.

(A) $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续　　(B) $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有全微分 $dz=0$

(C) $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 (x_0,y_0,z_0) 有切线　　(D) $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 有极值

(12) 记 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\tan x}{1+x^2}+x^2)dx$，$I_2=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x)dx$，

$I_3=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\tan^2 x)dx$，则（　　）.

(A) $I_1>I_2>I_3$　(B) $I_2>I_1>I_3$　(C) $I_2>I_3>I_1$　(D) $I_3>I_1>I_2$

二、解答题：（本题共 8 小题，满分 90 分，要求写出演算步骤及证明过程）

(13)（本题满分 10 分）

设参数方程 $\begin{cases} x=f(\sin t) \\ y=f(e^{2t}-1) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 可导，且 $f'(0)\neq 0$，求 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}$.

(14)（本题满分 10 分）

设函数 $z=f(3x-y)+g(x^2,xy)$，其中 f,g 有二阶连续（偏）导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(15)（本题满分 10 分）

试证：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

(16)（本题满分 12 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{-x})-\ln(3\cos x-1)}{x\sin x}$.

(17)（本题满分 12 分）

计算 $\iint\limits_D y^2 dxdy$，其中 D 由 $x=-3$，$y=0$，$y=2$ 及 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围区域.

(18)（本题满分 12 分）

求微分方程 $(1+x^2)y'-2xy=x$ 满足 $y(0)=1$ 的特解.

(19)（本题满分 12 分）

设曲线族 $y=a(1-x^2)(a>0)$，

1) 求此曲线族在 $(1,0)$ 点的切线与法线；

2) 在此曲线族中选一条曲线，使它与它在 $(1,0)$、$(-1,0)$ 两点的法线所围的面积是这族曲线中以同样方式所围的面积最小；

3) 求在满足 2）的曲线与 x 轴、y 轴所围面积绕 x 轴旋转而成的立体体积.

(20)（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内的二阶导数 $f''(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{(x-1)^2}=2$，证明：对任意 $x\in(0,2)$，有 $f(x)\geq 1$.