★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

1、（15 分）证明行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}=x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n.$$

2、（15 分）设 $\boldsymbol{A}:\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_s}$ 和 $\boldsymbol{B}:\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_s}$ 为两组 n 维向量，已知向量组 $\boldsymbol{A}:\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2},\cdots,\overrightarrow{\alpha_s}$ 线性无关，且 $\overrightarrow{\beta_i}=p_{i1}\overrightarrow{\alpha_1}+p_{i2}\overrightarrow{\alpha_2}+\cdots+p_{is}\overrightarrow{\alpha_s},(i=1,2,\cdots s)$，证明：向量组 $\boldsymbol{B}:\overrightarrow{\beta_1},\overrightarrow{\beta_2},\cdots,\overrightarrow{\beta_s}$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$. 其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix}.$$

3、（20 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，

（1）确定 a 与 b 的值；（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 。

4、（10 分）设 $f(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,(a_0\neq 0)$，若对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$，试证矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$。

5、（15 分）求一个正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}-2x_3^{\ 2}+4x_1x_3$ 化为标准型。

6、（15 分）设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，分别证明：$\boldsymbol{A}^{-1}$ 、$k\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{*}$（$\boldsymbol{A}$ 的伴随阵）都是正定矩阵。

7、(15 分)设 $f(x)$ 为 n 次多项式，如果 $f(x)$ 能被它的导函数 $f'(x)$ 整除，证明 $f(x)$ 有 n 重根。

8、（15 分）求 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$

有唯一解、无解或有无穷多解？当有无穷多解时求其通解。

9、（15 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶非零矩阵，若存在一个正整数 $n(\geq 2)$，使得 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{0}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角阵相似。

10、（15 分）证明 n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基。