

★★★★ 答题一律做在答题纸上, 做在试卷上无效。★★★★

一、填空 (共 30 分, 每题 5 分)

1. 近似数 x_1 的相对误差是 $e_r(x_1)$, x_2 的相对误差是 $e_r(x_2)$, 则 x_1/x_2 的相对误差 $e_r(x_1/x_2) \approx$ _____.
2. 方程 $xe^x - 2 = 0$ 在区间 $[0.5, 1]$ 内 _____ 有个根.
3. 方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.
4. 系数矩阵为 _____ 的方程组按高斯消去法计算是数字稳定的, 因而不必选择主元.
5. 函数 $f(x)$ 的 k 阶差商为 $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ 则存在 $\xi \in (\min(x_0, x_1, \dots, x_k), \max(x_0, x_1, \dots, x_k))$ 使 ξ 处 k 阶导数 $f^{(k)}(\xi) =$ _____.
6. 阿当姆斯外推公式是 _____.

二、计算分析题 (共 120 分, 每题 15 分)

1. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$$y_n = 5y_{n-1} - 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

若 $y_0 = \sqrt{3} \approx 1.73$ (3 位有效数字), 计算到 y_{10} 时误差有多大? 这个计算过程稳定吗?

2. 设 $f(x)$ 有连续的 2 阶导数, 且 $x^* \in (a, b)$ 是 $f(x) = 0$ 的单根, 证明迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

是局部收敛的。

3. 考虑下列插值问题：求一个二次多项式 $p(x)$ 使得

$$p(x_0) = y_0, p'(x_1) = m, p(x_2) = y_2,$$

其中 $x_0 \neq x_2$, y_0, m, y_2 为已知数据, 试给出使这一问题的解存在并唯一的条件.

4. 下表给出了函数 $f(x)$ 在 3 点上的函数值

x	30	45	60
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

请构造均差表, 并建立二次牛顿插值多项式计算 $f(50)$ 的值.

5. 证明矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不存在 LU 分解.

6. 确定下式中的待定参数, 使其代数精度尽可能高, 并指明求积公式所具有的代数精度.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af\left(-\frac{1}{2}\right) + Bf(0) + Cf\left(\frac{1}{2}\right)$$

7. 用复化梯形求积公式和复化抛物线求积公式计算下列积分.

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (n = 4)$$

8. 写出如下 2 阶方程组初值问题的四阶标准龙格-库塔公式和四阶阿达姆斯显式公式.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), & y(x_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), & z(x_0) = z_0 \end{cases}$$