★★★答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★

一、填空题：（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（1） 设 $f(x)=\begin{cases}(1-ax)^{\frac{2}{x}}(x>0)\\ \dfrac{\tan x^2}{1-\cos x}(x<0)\end{cases}$，要定义 $f(0)$ 使 $f(x)$ 在 R 上连续，则 $a=$___.

（2） 微分 $d(\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt{\sin x\cdot\sqrt[3]{e^{x^2}}}})=$________.

（3） 设 $f(x)=e^{1-x^2}$，$f(\varphi(x))=1-\sin 2x$，且 $\varphi(x)<0$，则 $\varphi'(x)=$______.

（4） 定积分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x\sqrt{\cos x}}dx=$________.

（5） 曲线 $y=\dfrac{x^2\arctan x}{x-1}$ 的斜渐近线________.

（6） 微分方程 $dx-(x\cos y+\dfrac{1}{2}\sin 2y)dy=0$ 满足 $y(\dfrac{\pi}{2})=1$ 的特解______.

二、单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（7） 当 $x\to 0$ 时，下列几个无穷小量中阶数最高的是（　　）.

（A）$\sqrt[3]{1+x}-1$　（B）$e^{\sin x^2}-1$　（C）$7x^3-3x^5$　（D）$\int_0^{1-\cos x}\sin t\,dt$

（8） 设 a 为常数，则方程 $\dfrac{x}{e}-\ln x=a^2$ 有（　　）个根.

（A）零　（B）一　（C）二　（D）三

（9） 曲线 $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|\ln|x+1|}$，则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的（　　）点.

（A）可去间断　（B）跳跃间断　（C）无穷间断　（D）连续

（10） 设函数 $f(x)=(2x^2-3x+1)\cos x$，则 $f'(x)=0$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内（　　）

（A）无根　（B）至少有三个根

（C）至多有一个根　（D）至多有二个根

（11） 设 $F(x)=\int_0^x du\int_0^{u^2}\ln(1+t^2)dt$，则 $F(x)$ 的凸区间为（　　）.

（A）$(-1,1)$　　（B）$(-\infty,0)$　　（C）$(0,+\infty)$　　（D）$(-\infty,+\infty)$

（12）设 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})dx$，则（　）

（A）$I=0$　　（B）$I<0$　　（C）$I=\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$I=\dfrac{\pi^2}{2}$

三、解答题：（本题共 8 小题，满分 90 分，要求写出演算步骤及证明过程）

（13）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\dfrac{dx}{x(x^6+3)}$.

（14）（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{-xy}-3z-e^z=0$ 确定，求在 $M(0,1,0)$ 点处偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1,0)}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,1,0)}$.

（15）（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-2$，判断 $x=a$ 是否为函数 $y=f(x)$ 的极值点？并证明你的结论.

（16）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\ln(1-t)}{t}dt$，1）对函数 $g(t)=\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ 增加什么条件，可使 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上必可导；2）计算 $\dfrac{d}{dx}f(x^2)$；3）证明 $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{2}f(x^2)$.

（17）（本题满分 12 分）

计算 $\iint\limits_D\dfrac{x^3}{y}dxdy$，其中 D 由 $x=1$，$x=2$，$y=1$，$y=x^n(n\in N)$ 所围区域.

（18）（本题满分 12 分）

求二阶微分方程 $y''+y=(10x-4)e^{3x}$ 的通解.

（19）（本题满分 12 分）

设抛物线 L：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 上点 $A(x,\dfrac{x^2}{4})$，过 A 作 L 的法线，1)求此法线方程；2)将上述法线被抛物线截下的弦记为 AB，试确定 A 的坐标，使 AB 的长度最小；3)求在满足 2）的弦 AB 与抛物线所围平面图形的面积.

（20）（本题满分 12 分）

试证：当 $x>1$ 时，不等式 $0<x\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1<\dfrac{1}{3(x^2-1)}$ 成立.