考试科目：（609）高 等 数 学　　共 2 页

★★★答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★

一、填空题：（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（1） 若 $f(x)=\begin{cases} ae^x(x<0) \\ 2-x(x\ge 0)\end{cases}$ 在 R 上是连续函数，则 $a=$____________.

（2） 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2\sin x}{n+1}\right)^n$，则 $df(x)=$____________.

（3） 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\cos(y-x)+1$ 满足 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解：____________.

（4） 由方程 $e^y+xy=e^{\cos x}$ 确定的函数 $y=y(x)$，与 y 轴交点处的切线方程：____________.

（5） 设 $\int\dfrac{x}{f(x^2)}dx=\arccos x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$____________.

（6） 如果极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{2}{x}}}{3+e^{\frac{3}{x}}}+\dfrac{a|\sin x|}{x}\right)$ 存在，则常数 $a=$____________.

二、单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

（7） $f(x)=|x\sin 2x|e^{\cos x}+1$（$x\in R$）是（　　）函数.

（A）有界　　（B）周期　　（C）单调　　（D）偶

（8） 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\int_0^x(1-\cos t)\ln(1-t^2)dt$ 是 x^5 的（　　）无穷小

（A）低阶　　（B）高阶　　（C）同阶　　（D）等价

（9） 曲线 $y=\dfrac{1}{x(x-2)}+\ln(1+2e^x)$ 的斜渐近线 $y=$（　　）.

（A）$x-1$　　（B）$x+\ln 2$　　（C）$x-2\ln 2$　　（D）$x+1$

（10） 设函数 $f(x)=(2x^2-3x+1)\sin x$，则在 $(0,\pi)$ 内使得 $f'(\xi)=0$ 成立的 ξ（　　）.

（A） 至少有三个　　（B）至多有二个　　（C）仅有一个　　（D）没有

（11） 设 $f(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，令 $w=f(x_1-x_2,x_2-x_3,x_4-x_3)$，则 $\dfrac{\partial w}{\partial x_1}+\dfrac{\partial w}{\partial x_2}+\dfrac{\partial w}{\partial x_3}+\dfrac{\partial w}{\partial x_4}=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) f_x　　(D) $f_x+f_y+f_z$

(12) 设$I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^5+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$，则（　　）

(A) $I=0$　　(B) $I=\pi$　　(C) $I=\frac{\pi}{2}$　　(D) $I=\frac{\pi^2}{2}$

三、**解答题**：（本题共8小题，满分90分，要求写出演算步骤及证明过程）

(13)（本题满分10分）

计算不定积分$\int\frac{dx}{e^x+e^{\frac{x}{2}}}$.

(14)（本题满分10分）

设函数$z=z(x,y)$由方程$xy-3z+e^z=2$确定，求$dz|_{(1,1,0)}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(1,1,0)}$.

(15)（本题满分10分）

计算$\iint_D\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dxdy$，其中$D$由$x=0$，$x=2$，$y=4$，$y=x^2$所围区域.

(16)（本题满分12分）

设曲线$L: y=\ln x$，1）过原点$O(0,0)$作L的切线，求此切线方程；2)求上述切线、曲线与直线$y=0$所围的平面图形的面积S，3）求S绕x轴旋转一周所得体积.

(17)（本题满分12分）

求通过点$(1,2)$，且其上任意点处的切线与坐标原点的距离等于该点横坐标的绝对值的曲线方程.

(18)（本题满分12分）

设函数$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}\ (x\neq 0)$，1）求函数的单调增区间；2）求函数的极值与拐点；3）求使得方程$(x+2)e^{\frac{1}{x}}-k=0$有两个根的k的范围.

(19)（本题满分12分）

设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x\sin x}=3$，求$f(0)$、$f'(0)$.

(20)（本题满分12分

设$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调递增，

1）记$\varphi(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，证明$\varphi'(x)\geq 0\ (x\in[a,b])$；

2）证明：$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx\geq 0$.