

杭 州 师 范 学 院

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试题

学科专业： 应用数学

研究方向： 算法设计与计算机软件

考试科目： 高等数学

- 说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

一、填空题（请将答案填入横线，每题3分，共30分）

1、已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{1/x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ _____

2、若函数 $y = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x) = \arctan \sqrt{x}$ ，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} =$ _____

3、设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$ ，则 $f(x) =$ _____

4、曲线 $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ 的拐点是 _____

5、设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$ ，其中 f, φ 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____

6、设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____

7、设方阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = o$ ，则 $(A - E)^{-1} =$ _____

8、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 A 的全部特征值是 _____

9、设随机事件 A, B 以及 $A \cup B$ 的概率分别为 $0.4, 0.3, 0.6$ ，则 $P(A\bar{B}) =$ _____

- A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.
- B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
- C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
- D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

8、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 所对应的齐次线性方程组, 那么下列结论中是正确的。

- A. $Ax = 0$ 仅有零解时, $Ax = b$ 有唯一解.
- B. $Ax = 0$ 有非零解时, $Ax = b$ 有无穷多解.
- C. $Ax = b$ 有无穷多解时, $Ax = 0$ 仅有零解.
- D. $Ax = b$ 有无穷多解时, $Ax = 0$ 有非零解.

9、已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, $D(X) = 1.44$, 则二项分布参数 n, p 的值是

- A. 4;0.6 B. 6;0.4 C. 8;0.3 D. 24;0.1

10、设随机变量 X, Y 独立同分布, 记 $U = X - Y, V = X + Y$, 则随机变量 U, V 的关系为

- A. 不独立. B. 独立. C. 相关系数不为零. D. 相关系数为零.

三、基本计算题 (简要写出计算过程, 每题 6 分, 共 30 分)

1、试求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

2、设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$

3、计算 $\iint_D x dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 \leq 2x$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4、求矩阵 A 的秩.

5、已知 $P(A) = P(B) = 1/2$, 若 A, B 相互独立, 求概率 $P(A \cup B)$.

四、解答题 (写出详细计算过程或论证过程, 每题 12 分, 共 60 分)

1、若 $0 < x < 1$, 证明不等式 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

2、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

3、求微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$ 的通解

4、设 V 是由向量组 $\alpha_1 = [1,1,2,3]^T$, $\alpha_2 = [-1,1,4-1]^T$, $\alpha_3 = [5,-1,-8,9]^T$ 所生成的向量空间, 求 V 的维数和它的一组规范正交基.

5、设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-x^2/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求: (1) 常数 A, B ; (2) X 的概率密度; (3) 概率 $P\{-\sqrt{2} < X < 2\}$.