

杭 州 师 范 学 院

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试题

学科专业： 基础数学、应用数学

研究方向： _____

考试科目： 数 学 分 析

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；

2、命题时试题不得超过周围边框；

3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

一、计算下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n-1}{n}} \right)$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 a 可导，求下面的极限：

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+2t) - f(a+t)}{2t}$$

3.
$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \tan \sqrt{1+x^2} dx$$

4.
$$\iint_D |x+y| dx dy$$
 , 其中 $D = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

二、解答下列各题：（每小题 8 分，共 32 分）

1. 求曲线积分 $\int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds$ 的值，其中曲线 l 是圆螺旋线： $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

2. 利用 Gauss 公式计算曲面积分：
$$\oiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$
 , 其中 S 是立方体：

$0 \leq x, y, z \leq a$ 的外表面.

3. 设 $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

4. 计算无穷积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

三、(10 分) 证明函数 $f(x, y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的, 但非关于二个变元 (x, y) 的连续函数.

四、(12 分) 证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 则当 $x > x_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也收敛.

五、(12 分) 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分必要条件是: 对区间 I 上任意两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) \in [a, b]$. 试证存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

七、(12 分) 求函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \cdot x^{2n}$ 的导数 $f'(x)$ 与定积分 $\int_0^x f(t) dt$, 并给出收敛区间.

八、(10 分) 设 $\alpha > \frac{1}{2}$ 是一个常数, $a_n \geq 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n} \sin nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

九、(10 分) 证明: 若函数 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall n \in N$, 定义 $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, 则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 0.