杭 州 师 范 学 院

2007 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码： 414

考试科目名称： 高等代数

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

一、(20 分)

设 $A\in M_n(\boldsymbol{C})$，$f(x)\in \boldsymbol{C}[x]$，且$\partial^0 f(x)>0$，$g(x)$是以 A 为根的次数最低的多项式，求证：1、若$(f(x), g(x))=d(x)$，则 $d(A)$的秩与 $f(A)$的秩相等；

2、$f(A)$可逆$\Leftrightarrow(f(x), g(x))=1$.

二、(20 分)

计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

三、(15 分)

设 A 为 n 阶方阵，I 为 n 阶单位阵，且满足 $A^3=3A(A-I)$，试证 $A-I$ 为可逆阵，并求$(A-I)^{-1}$.

四、(20 分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k & -k \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$（$k\in\mathbf{R}$）分别求矩阵 A 的秩；并求 $AX=0$ 的基础解系。

五、 (15 分)

a 为何值时，下列线性方程组有惟一解？无解？无穷多解？并给出一般解。

$$\begin{cases} (a+3)x_1+x_2+2x_3=a \\ ax_1+(a-1)x_2+x_3=a \\ 3(a+1)x_1+ax_2+(a+3)x_3=3 \end{cases}$$

六、(20 分)

σ 是向量空间 F^4 上的线性变换，对于任意 $\xi\in F^4$，有 $\sigma(\xi)=A\xi$；其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}$$

求线性变换 σ 的像和核的基与维数.

七、(20 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

若 A 为三维向量空间 V 的线性变换 σ 关于基$\{\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3\}$的矩阵，则 B 与 C 是 σ 关于 V 的其他基的矩阵吗?试予以判断，并说明理由。

八、(20 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+tx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，

1） 确定参数 t;
2） 用正交变换把二次型化为标准形，并给出所用的正交阵;
3） 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面。