杭 州 师 范 大 学

2009 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码： 813

考试科目名称： 高等代数

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；
4、
5、

1、(15 分)设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，$f(x)$对四个不同整数 a_i(i=1、2、3、4)的值都为 1，即 $f(a_i)=1$，则 $f(x)+1$ 无整数根.

2、(15 分)利用升阶法计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n+b_n \end{vmatrix}$$ 其中 $b_1b_2\cdots b_n\neq 0$.

3、(20 分)设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & k & -k \end{pmatrix}$ （$k\in\boldsymbol{R}$）

求齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的基和维数.

4、(20 分)已知 n 阶实对称阵 A 是幂等矩阵(即 $A^2=A$)，且秩 $A=r$，求 $det(3I-A)$的值.

5、(20 分)设 a，b 为两个复数，令

$V_a=\{f(x)\mid f(x)\in F[x]，f(a)=0\}$，$V_b=\{g(x)\mid g(x)\in F[x]，g(b)=0\}$，

为 $F[x]$的两个子空间，试证：V_a 与 V_b 同构.

6、(20 分)设 $V=V_1\oplus V_2$，σ，$\tau\in L(V)$，对于 $\forall\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V$，都有 $\sigma(\alpha)=\alpha_1$，$(\alpha_1\in V_1，\alpha_2\in V_2)$，求证 V_1 与 V_2 都是 τ 的不变子空间 $\Leftrightarrow$ $\sigma\tau=\tau\sigma$.

7、(20 分)设 W 为 n 维欧氏空间 V 的 $n-1$ 维子空间，且 V 中的非零向量 α 与 W 正交，即$<\alpha，W>=0$；若 $\sigma\in L(V)$，且对于 $\forall\ \xi\in W$，都有 $\sigma(\xi)=\xi$，而 $\sigma(\alpha)=-\alpha$，则 σ 是一个正交变换.

8、(20 分)设 A，B 皆为 n 阶实对称阵，且 A 为正定阵．证明存在一个 n 阶实可逆阵 T，使 $T'AT=I_n$，$T'BT=\mathrm{diag}(\lambda_1，\lambda_2，\cdots，\lambda_n)$，其中 λ_i，$i=1，2，\cdots，n$，为 $|xA-B|=0$ 的根.

特别，若 B 也是正定阵，则 λ_1，$\cdots$，λ_n 皆为正实数.