

杭州师范大学

2010 年招收攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目代码: 714考试科目名称: 数学分析

- 说明: 1、命题时请按有关说明填写清楚、完整;
 2、命题时试题不得超过周围边框;
 3、考生答题时一律写在答题纸上, 否则漏批责任自负;
 4、
 5、

一、计算下列各题: (每小题 8 分, 共 40 分)

1、求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

2、求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$.

3、求不定积分 $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

4、设 $y = f(x)$ 是由方程 $y = x + \arctan y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5、试求曲线积分 $\oint_L y dx + \sin x dy$, 其中 L 是 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴所围成的闭曲线, 依顺时针方向.

二、解答下列各题: (每小题 8 分, 共 40 分)

1、求二重积分 $\iint_{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ 的值, 其中 $a < b$.

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

2、计算广义积分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.

3、计算定积分 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$.

4、讨论积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 的收敛性.

5、试求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

三、(12分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且对任何 $x \in [a, b]$, 满足 $\left| f(x) - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$.

试证方程 $f(f(x)) = x$ 在 $[a, b]$ 上至少有一个解.

四、(12分) 试用柯西收敛准则证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 收敛.

五、(12分) 用格林公式计算曲线积分 $\oint_L e^x [(y - \sin x) dx + (2 - \cos y) dy]$, 其中 L 为曲线 $y = x^2$ 与 $y = x$ 所围成的为区域 D 的边界, 依逆时针方向.

六、(12分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且满足关系式 $f(1) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx = 0$. 证明:

在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

七、(12分) 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), n = 1, 2, 3, \dots$. 证明:

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在; (2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛.

八、(10分) 证明: 函数列 $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ 在 $[0, 1]$ 上非一致收敛, 但却有

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$, 请回答这说明了什么?