杭 州 师 范 大 学

2011 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码： 825

考试科目名称： 高等代数

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

1.（10 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 是实系数多项式，且 $x^3f(x)^2=x^2g(x)^4+x^4h(x)^6$，求证：$f(x)=g(x)=h(x)=0$ 。

2、（20 分）设 $a_1,a_2,\ldots,a_n,x$ 都是实数，计算行列式

（1）$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_n \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}$；（2）$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x. & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x \end{vmatrix}$。

3.（10 分）求证：一个 $n\times m$ 矩阵 A 的秩 ≤ 1 当且仅当 A 可以表示成一个 $n\times 1$ 矩阵与一个 $1\times m$ 矩阵之积。

4.（16 分）设四元齐次线性方程组(I) 为

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$$

又知某齐次线性方程组(II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$ 。

（1）求线性方程组(I) 的通解；(2) 线性方程组(I) 和(II) 是否有公共的非零解？若没有，则说明理由；若有，则求出所有的公共非零解。

5.（24 分）令 $M_{n\times m}(F)$ 是数域 F 上 $n\times m$ 矩阵的集合。

（1）已知：$A,\ B\in M_{n\times m}(F)$，求证：$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$；

（2）已知：$A_{m\times n}\in M_{m\times n}(F),\ B_{n\times k}\in M_{n\times k}(F)$ 且 $AB=0$，求证：$r(A)+r(B)\leq n$；

（3）已知：$A\in M_n(F),\ A^3=A$，求证：$r(A)+r(A^2-I)=n$ 。

6.（18 分）设 A，B 都是 n 阶可逆方阵, C 是 n 阶方阵. 证明 2n 阶方阵 $D=\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 可逆, 并求 D^{-1}。

7.（10 分）设 $L(V)$ 是数域 F 向量空间 V 上线性变换的集合，令 $\sigma \in L(V)$，$\xi \in V$，并且 $\xi, \sigma(\xi)$，...，$\sigma^{k-1}(\xi)$ 都不等于零，但 $\sigma^{k}(\xi)=0$，求证：向量组

$$\xi, \sigma(\xi), \ldots, \sigma^{k-1}(\xi)$$

线性无关。

8．（14 分）求使二次型

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+...+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

为正定的充要条件。

9.（10 分）设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，且 V 的子空间 W 在 σ 之下不变，那么 W 的正交补也在 σ 之下不变。

10．（18 分）设 $M \in F^{n\times n}$, F 为数域，$f(x), g(x) \in F[x]$ 且 $(f(x), g(x))=1$。$A=f(M), B=g(M)$. W, W_1, W_2 分别是齐次线性方程组 $ABX=0, AX=0, BX=0$ 的解空间. 求证：$W=W_1 \oplus W_2$。