杭 州 师 范 大 学

2011 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码： 725

考试科目名称： 数学分析

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；
4、
5、

一 计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^2\sin x}$

2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\dfrac{2}{x}]$

4 求 $\int_l(x+y)ds$ 其中 l 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形。

5 求 $\iint_D\left|y-x^2\right|dxdy$ 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$

二 （满分 15 分） 设 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$， 求 $f''(0)$

三 （满分 15 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\dfrac{1}{2^n}$ 的和

四 （满分 15 分） 设$u(x,y)=\int_{x-ay}^{x+ay}\varphi(t)dt$，其中$\varphi(t)$是一阶可导的函数，$a$是常数。

求$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$

五 （满分 15 分） 设$0<x_1<x_2$，证明$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$

六 （满分 10 分） 证明函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$在$(0,+\infty)$一致收敛。

七 （满分 10 分） 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，若对任意的$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$有$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$。证明$f(x)=0, x\in[a,b]$

八 （满分 10 分） 证明函数$f(x)=x^2$在$[-R,R]$上一致连续，在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续。

杭　州　师　范　大　学

2011 年招收攻读硕士研究生入学考试题(参考答案)

考试科目代码： 725

考试科目名称： 数学分析

一 计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^2\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^2\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\dfrac{x^2}{2}}{x^3}$ (6 分)

$=\dfrac{1}{3}$ （12 分）

2 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$ （6 分）

$=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$ （12 分）

$=e^{\frac{1}{2}}$

3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{2}{x}]$

解：设 $0<x<1$，存在 $n\in N^+$ 使得 $n\le\frac{2}{x}<(n+1)$，（6 分）从而 $\frac{2}{n+1}<x\le\frac{2}{n}$，因此

$$\frac{2n}{n+1}<x[\frac{2}{x}]\le\frac{2}{n}n$$ （10 分）

注意到 $x\to 0$ 时有 $n\to\infty$，由夹逼准则知道原极限为 2。（12 分）

4 求 $\int_l (x+y)ds$ 其中 l 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形。

解：$\int_l (x+y)ds=\int_{\overrightarrow{OA}}(x+y)ds+\int_{\overrightarrow{AB}}(x+y)ds+\int_{\overrightarrow{BO}}(x+y)ds$ （6 分）

$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy$

$=1+\sqrt{2}$

（12 分）

5 求 $\iint_D \left|y-x^2\right|dxdy$ 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$

解：令 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1,y>x^2\right\}$ $D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1,y\le x^2\right\}$

$\iint_D \left|y-x^2\right|dxdy$

$=\iint_{D_1}\left(y-x^2\right)dxdy+\iint_{D_2}(x^2-y)dxdy$ （4 分）

$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\left(y-x^2\right)dy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\left(x^2-y\right)dy$ （8 分）

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{10}$

（12 分）

$=\frac{11}{30}$

二 （满分 15 分） 设 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$， 求 $f''(0)$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$ （5 分）

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}$ （10 分）

所以 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=0$ （15 分）

三 （满分 15 分） 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\dfrac{1}{2^n}$ 的和

解：当 $|x|<1$ 时，

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ （5 分）

从而 $\ln(1+x)=\int\limits_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\int\limits_0^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ （10 分）

在上式中令 $x=\dfrac{1}{2}$ 得到

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\dfrac{1}{2^n}=\ln\dfrac{3}{2}$ （15 分）

四 （满分 15 分） 设 $u(x,y)=\int_{x-ay}^{x+ay}\varphi(t)dt$，其中 $\varphi(t)$ 是一阶可导的函数，a 是常数。

求 $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x+ay)-\varphi(x-ay),\dfrac{\partial u}{\partial y}=a\varphi(x+ay)+a\varphi(x-ay)$ （5 分）

$\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\varphi'(x+ay)-\varphi'(x-ay)$

（10 分）

$\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=a^2\varphi'(x+ay)-a^2\varphi'(x-ay)$

所以$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0$ （15 分）

五 （满分 15 分）设$0<x_1<x_2$，证明$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$

证明：设$f(x)=\frac{\tan x}{x},x>0$

由于$f'(x)=\frac{x\sec^2-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}>0$ （8 分）

所以$f(x)=\frac{\tan x}{x}$在$(0,+\infty)$单调递增。因此当$0<x_1<x_2$，时得到

$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$ （15 分）

六 （满分 10 分）证明函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$在$(0,+\infty)$一致收敛。

证明：令$f(x)=x^2e^{-nx},x>0$

由于$f'(x)=xe^{-nx}(2-nx)$在$(0,\frac{2}{n})$为正，在$(\frac{2}{n},+\infty)$为负，所以函数$f(x)=x^2e^{-nx},x>0$

在$x=\frac{2}{n}$处达到最大值，$f(\frac{2}{n})=\frac{4}{n^2}e^{-2}$ （6 分）

这样$\left|x^2e^{-nx}\right|\le\frac{4}{n^2}e^{-2},x\in(0,+\infty)$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}e^{-2}$收敛，由威尔斯特拉斯判别法知道级数$\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$在$(0,+\infty)$一致收敛。 （10 分）

七 （满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若对任意的 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ 有 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$。证明 $f(x)=0, x\in[a,b]$

证明：反证法，若 $f(x)$ 不恒为零，则存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ （4 分）

由函数极限的性质知道，存在 $\delta>0$ 使得 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$ 时

$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)>0$

若 $x_0=a$ 或 $x_0=b$，上面 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 变为 $(a,x_0+\delta)$ 或 $(x_0-\delta,b)$

而积分 $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx>\frac{1}{2}f(x_0)2\delta>0$

这与已知矛盾。 （10 分）

八 （满分 10 分） 证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-R,R]$ 上一致连续，在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

证明：（1）证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-R,R]$ 上一致连续。

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2R}$，任取 $x_1,x_2\in[-R,R]$，有

$\left|x_1^2-x_2^2\right|=\left|x_1+x_2\right|\left|x_1-x_2\right|\le 2R\left|x_1-x_2\right|<\varepsilon$

根据一致连续的定义，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-R,R]$ 上一致连续。 （5 分）

（2）证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

设 $x_n=\sqrt{n+1}, y_n=\sqrt{n}$

注意到 $\left|x_n-y_n\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\to 0,(n\to\infty)$

而 $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|=(n+1)-n=1$

因此，若 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，对任意的 $\delta>0$，总有 x_n,y_n 满足 $\left|x_n-y_n\right|<\delta$

但是 $\left|f(x_n)-f(y_n)\right|=1>\frac{1}{2}$

所以函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。 （10 分）