

杭州师范大学

2012 年招收攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目代码：_____ 719 _____

考试科目名称：_____ 量子力学 _____

- 说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

一、填空题（每空 2.5 分，共 25 分）

- 量子力学中力学量算符必须是_____算符，以保证它的本征值为_____数。
对一个力学量进行测量时，所得到的测量值肯定是_____当中某一个，测量结果一般是不确定的，除非体系处于_____。测量结果的不确定性来源于_____。
两个力学量同时具有确定值的条件是_____。
- 自由粒子平面波波函数 $\psi(x) = ce^{ikx}$ ，则该自由粒子的动量不确定度 $\Delta p =$ _____，坐标不确定度 $\Delta x =$ _____。
- 根据德布罗意波粒二象性，能量为 E ，动量为 p 的微观粒子，与对应的波动的频率 ν 和波长 λ 的关系式分别是_____，_____。

二、简答题（每题 5 分，共 30 分）

- 写出含时薛定谔方程，当时势能与时间无关时，导出定态薛定谔方程。假设定态薛定谔方程给出能量本征值是量子化的，从定态方程的解构造出含时薛定谔方程的一般解。
- 叙述量子力学中的测不准原理，以动量和坐标为例给出具体测不准关系式。
- 叙述量子力学中物理量算符的性质以及与力学量测量值之间的关系。
- 叙述（或者通过变换关系式描述）你对量子力学中的表象变换的理解。
- 电子的自旋角动量有什么特点？
- 叙述全同粒子波函数的性质。

三、计算题（95 分）

- （16 分）设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases} \text{ 中运动,}$$

- 求：(1). 求解粒子能量本征值及对应的状态波函数。(6分)
 (2). 粒子在一维空间的几率分布函数。(5分)
 (3). 在第 n 个能量激发态上，证明 $\bar{x} = \frac{a}{2}$, $\bar{p} = 0$ 。(5分)

2. (15分) 设氢原子处于状态

$$\psi(r, \theta, \varphi) = c_1 R_{21}(r) Y_{00}(\theta, \varphi) + c_2 R_{31}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) + c_3 R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

式中 c_1, c_2, c_3 为已知常数，且 $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$

- 求：(1) 求能测到氢原子能量值及其测量到的几率。(5分)
 (2) 轨道角动量平方 \hat{L}^2 的可能值，可能值出现的几率以及 \hat{L}^2 的平均值。(5分)
 (3) z 分量 \hat{L}_z 的可能值，可能值出现的几率以及 \hat{L}_z 的平均值。(5分)

3. (10分)

- (1) 证明 $[AB, C] = A[B, C] - [A, C]B$, $[A, BC] = [A, B]C - B[A, C]$,

式中花括号为反对易关系式，如： $\{A, B\} = AB + BA$ (5分)

- (2) 证明 $\varphi_1 = y + iz$, $\varphi_2 = z + ix$, $\varphi_3 = x + iy$ 分别是下面三个角动量分量算符的本征态，本征值为 \hbar .

$$l_x = -i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}), l_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}), l_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}), \quad (5分)$$

4. (16分) 设有一算符 \hat{a} 具有性质， $\hat{a}^2 = 0$, $\{\hat{a}, \hat{a}^+\} = \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} = 1$, 求证：

(1), $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ 是一个厄密算符；

(2), $\hat{N}^2 = \hat{N}$

(3), \hat{N} 的本征值为 0 或者 1

$$(4), [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$$

5. (18分) 一维谐振子的哈密顿为

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} Kx^2$$

假设它处在基态, 若在加上一个弹性力作用 $H' = \frac{1}{2} bx^2$, 试用微扰论计算 H' 对能量的一级和二级修正, 并与严格解比较。

[记谐振子的基态: $\psi_0^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$; 公式: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{\frac{3}{2}}}$;

$$x^2 \psi_k^{(0)} = \frac{1}{2\alpha^2} \{ \sqrt{k(k-1)} \psi_{k-2}^{(0)} + (2k+1) \psi_k^{(0)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \psi_{k+2}^{(0)} \}$$

6. (20分) 两个自旋为 $1/2$, 质量为 m 的无相互作用的全同费米子处在线性谐振子势场中。计算体系的基态和第一激发态的能量本征值和本征函数(同时考虑空间自由度和自旋自由度), 指出简并度。已知单粒子能级及本征函数(空间部分)分别为 $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ 和 $\psi_n(x)$ 。