**杭 州 师 范 大 学**

**2012 年招收攻读硕士研究生入学考试题**

**考试科目代码：** 817

**考试科目名称：** 高等代数

说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；

1． 设 $p$ 为一个素数，证明多项式 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ 在有理数域上不可约。(15 分)

2．计算行列式(15 分)

$$D_n=\begin{vmatrix} a+1 & a & a & \dots & a \\ a & a+2 & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+n \end{vmatrix}$$。

3．设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{2012}\}$ 线性无关，求证下向量组(15 分)

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\dots,\beta_{2011}=\alpha_{2011}+\alpha_{2012},\beta_{2012}=\alpha_{2012}+\alpha_1$$

线性相关。

4． 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，已知 $A$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $A$ 的二重特征根，求可逆阵 $T$，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵．(15 分)

5．线性方程组$\begin{cases}3x+ay+8z=2a+4,\\2x+3y+5z=2a-1,\\ \quad x+2y+3z=a.\end{cases}$当$a$为何值时，方程组：（1）有唯一解，并求其解；（2）有无穷个解，并求其解。(15 分)

6．设$A$是$m\times n$矩阵，$B$是$n\times m$矩阵，$n\geq m$且$AB$是$m$阶单位矩阵，求证$B$的秩为$m$。(15 分)

7．设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$，$F$为数域，$W=\left\{X\in F^{3\times3}\mid AX=XA\right\}$，求$W$的维数和一个基.(15 分)

8. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2-x_3^2-2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$. (1) $\lambda$取何值时，二次型是负定的; (2) 对$\lambda=0$试用正交变换化二次型为标准形.(15 分)

9. 设$F$是一个数域, 已知向量空间$F^3$中的两向量组（15 分）

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,0,1)\\\alpha_2=(0,-1,1),\\\alpha_3=(1,-1,2)\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_1=(1,1,1)\\\beta_2=(0,-1,1)\\\beta_3=(0,0,2)\end{cases}$$

(1) 试问是否存在$F^3$上的线性变换$\sigma$，满足$\sigma(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,3.$

(2) 试问是否存在$F^3$上的线性变换$\tau$，满足$\tau(\beta_i)=\alpha_i$，$i=1,2,3.$

10．设$\sigma$是$n$维欧氏空间$V$上的一个线性变换且满足内积等式(15 分)

$$\left(\sigma(\alpha),\beta\right)=-\left(\alpha,\sigma(\beta)\right),\ \forall\alpha,\beta\in V.$$

（1） 求证：$\sigma$的特征值为零；

（2）求证：存在$V$的一个规范正交基，使$\sigma^2$在此基下的矩阵为对角阵。