中国计量学院
2007 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 数学分析

考试科目代码: 604

考 生 姓 名: ____________

考 生 编 号: ____________

考生须知:

1、所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共__二__大题，共__二__页。

一、(共 8 小题，共 86 分)

1. 用“$\varepsilon-\delta$”定义验证极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$. (10 分)

2. 计算极限：$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}.$$ (10 分)

3. 设 $g(0)=g'(0)=0$，$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求 $f'(0)$. (10 分)

4. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^{\alpha}}dx$ 的收敛性. (10 分)

5. 若函数 f 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

试求函数 $f(x)+c$ 和 $f(x+c)$ 的 Fourier 级数. (10 分)

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$, 其中 Ω 是两个球：$x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz\,(R>0)$ 的公共部分. (12 分)

7. 计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,$$

其中 Σ 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2\,(0\le z\le h)$ 的下侧. (12 分)

8. 当 p 满足什么条件时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{p}} \qquad (0 < x < \pi)$$

（1）绝对收敛？（2）条件收敛？（3）发散？ （12 分）

二、（共 6 小题，共 64 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geq 0$, $f(x)$ 不恒为零，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$. （10 分）

2. 若在有限区间 (a,b) 内单调有界函数 $f(x)$ 是连续的，则此函数在 (a,b) 内一致连续. （10 分）

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]\ (b>a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}. \qquad (10 分)$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足： $f(0)=0,\ 0<f'(0)\leq 1$. 试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int_0^1 \left(f(x)\right)^3 dx. \qquad (10 分)$$

5. 证明不等式：

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right). \qquad (12 分)$$

6. 证明函数列 $f_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,\pi]$ 上非一致收敛. （12 分）

【完】