

中国计量学院

2008 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称：_____ 高等代数 _____

考试科目代码：_____ 804 _____

考生 姓 名：_____

考 生 编 号：_____

考生须知：

- 1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。
- 2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。
- 3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 十二 大题，共 二 页。

一、在实数域上将多项式 $f(x) = x^7 + 2x^6 - 6x^5 - 8x^4 + 17x^3 + 6x^2 - 20x + 8$ 分解为不可约因式的乘积。(12分)

二、(12分) 设 $A = \begin{pmatrix} B_{s \times t} & 0_{s \times s} \\ 0_{t \times t} & C_{t \times s} \end{pmatrix}$, 计算 $|A|$ 。

三、(12分) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, $|A| = a$, 其中 $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 证明 $|B| = a$ 。

四、(12分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, b 是 $n \times 1$ 矩阵, 试证明:

1. 秩 $(A^T A) = \text{秩 } A$;
2. 方程组 $A^T A x = A^T b$ 必有解。

五、(12分) λ, μ 为何值时线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解? 无解? 有无穷多解? 有无穷多解时求其通解。

六、(12分) 设向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & p+2 & p \end{pmatrix}$

1. p 为何值时, 该向量组线性无关;
2. p 为何值时, 该向量组线性相关, 并在此时求出它的秩、一个极大线性无关组、并用该极大无关组表出其余向量。

七、(12分) 设 σ 为 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma$ 。证明: (1) σ 的特征值为 0, 1; (2) 设 V_0, V_1 分别为 0, 1 对应的特征子空间, 则有 $V = V_0 \oplus V_1$ 。

八、(15分)在欧氏空间 \mathbf{R}^4 内求下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间 S 的正交补子空间 S^\perp 的一组标准正交基。

九、(12分)设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求 A 的特征值; (2) 求 A 的一个标准正交的特征向量系 [即为 A 的一个由特征向量构成的标准正交向量组, 且所含向量个数最多]; (3) 求 A 的Jordan标准形。

特征向量系 [即为 A 的一个由特征向量构成的标准正交向量组, 且所含向量个数最多]; (3) 求 A 的Jordan标准形。

十、(12分)我们知道, 当 P 、 Q 可逆时, 有秩 $(PAB) = \text{秩}(ABQ) = \text{秩}(AB)$, 试讨论当 F 是可逆矩阵时, 等式秩 $(AFB) = \text{秩}(AB)$ 是否成立, 若成立, 则证明之, 否则, 举反例加以否定(本题中假设矩阵乘法均有意义)。

十一、(12分)设 A 、 B 是两个 n 阶实对称矩阵, 且 B 是正定矩阵, 证明存在一 n 阶实可逆矩阵 T , 使 $T^T A T$ 与 $T^T B T$ 同时对角化。

十二、(15分)设 A 、 B 为复数域 \mathbf{C} 上的3阶矩阵。(1) 证明: A 与 B 相似的充要条件为 A 与 B 的特征多项式与最小多项式相同; (2) 举出特征多项式与最小多项式中仅有一个相同而 A 、 B 不相似的例子。

【完】