中国计量学院
2009 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 高等代数

考试科目代码: 804

考 生 姓 名: ____________

考 生 编 号: ____________

考生须知:

1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 十二 大题，共 二 页。

一、(10 分)设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式，如果对于任何多项式 $f(x)$ ， $g(x)$ ，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ ，可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$ ，试证 $p(x)$ 是不可约多项式.

二、(10 分)计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

三、(10 分)证明：当 a 为任一实数时，向量组 $\alpha=(a,a,a,a)^T$ ，$\beta=(a,a+1,a+2,a+3)^T$ ， $\gamma=(a,2a,3a,4a)^T$ 线性相关.

四、(15 分)讨论 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=0 \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

有唯一解？无解？无穷多解？有无穷多解时求其通解.

五、(15 分)

(1) $A,B\in P^{n\times n}$ ， 若 $AB=0$ ，则秩 $(A)+$ 秩 $(B)\le n$.

(2) $A\in P^{n\times n}$ ，秩 $(A)=r$ ，证明存在 n 阶可逆矩阵 P ，使 PAP^{-1} 后 $n-r$ 行全为零.

六、(15 分)若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ ，试确定 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

七、(10 分)设 V_1,V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明 n 维实向量空间 R^n 是 V_1 与 V_2 的直和.

八、（15 分）在 $R^{2\times2}$ 中，设 $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，令

$$\sigma(X)=XM-MX,\ X\in R^{2\times2}$$

则 σ 是 $R^{2\times2}$ 的一个变换.

（1） 证明 σ 是 $R^{2\times2}$ 的一个线性变换.

（2） 求 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$，$\sigma^{-1}(0)$ 的维数和一组基.

九、（10 分）设 V 是一个 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个标准正交基，σ 是 V 的一个线性变换，$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 σ 关于这个基的矩阵，

证明：$a_{ji}=(\sigma(\alpha_i),\alpha_j),\ i,j=1,2,\cdots,n$（其中 (,) 表示内积）.

十、（15 分）证明：对 n 维线性空间 V 中的任二子空间 V_1,V_2，它们的并 $V_1\cup V_2$ 是 V 的子空间的充要条件是 $V_1\subseteq V_2$ 或者 $V_2\subseteq V_1$.

十一、（15 分）

(1) 设 λ_1,λ_2 是线性变换 φ 的两个不同的特征值，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 φ 的特征向量；

(2) 证明：如果线性空间 V 的线性变换 φ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 φ 是数乘变换.

十二、（10 分）设 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：对任意的非负整数 n，$(x^2+x+1,f_n(x))=1$.

【完】