中国计量学院
2010 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 高等代数

考试科目代码: 804

考 生 姓 名: ____________

考 生 编 号: ____________

考生须知:

1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 十二 大题，共 二 页。

一、（10 分）设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，

证明：$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

二、（10 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

三、（15 分）证明：设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组线性无关的向量，那么向量组

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{r-1}+\alpha_r,\alpha_r+\alpha_1$是否线性无关？证明之.

四、（10 分）讨论a,b为何值时，方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$

有解？无解？在有解的情况下求其通解（由结构式表示）.

五、（15 分）令 A 为$n(n\geq 2)$阶方阵，证明：$|A^*|=|A|^{n-1}$.

六、（15 分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

问a为何值时，f的秩为 2？此时，求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

七、（15 分）已知$W_1=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in R\right\}$，

$W_2=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| x,y,z\in R\right\}$，求$W_1+W_2,W_1\cap W_2$的基与维数.

八、（10 分）设n是一个自然数，V是由所有的$n\times n$实矩阵构成的n^2维向量空间，U和W分别为所有的$n\times n$对称矩阵和反对称矩阵构成的空间. 证明：$V=U\oplus W$，即V是U和W的直和.

九、（10 分）设$V=R^{2\times 2}$（即 2 阶实方阵全体所构成的线性空间），任意$A\in V$，定义$\varphi(A)=A^T+A$，其中A^T表示A的转置，证明φ是V的线性变换，并求φ在基

$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$下的矩阵

十、（15 分）设λ_1,λ_2是方阵A的两个不同的特征根，α_1,α_2分别是属于λ_1和λ_2的特征向量.

(1) 证明α_1,α_2线性无关.

(2) 试问$\alpha_1+\alpha_2$是否是A的特征向量？证明你的结论.

十一、（15 分）设V是n维欧氏空间，η是V中的一个单位向量，定义变换$\sigma:\sigma(\alpha)=\alpha-(\alpha,\eta)\eta$，$\forall\alpha\in V$，证明：

（1）σ是正交变换.

（2）σ在V的任意一组标准正交基下的矩阵行列式等于 1.

十二、（10 分）设多项式$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-(2n-1))+1$，其中$n$为非负整数，证明：$f(x)$在有理数域上一定不可约.

【完】