中国计量学院
2010 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 数学分析

考试科目代码: 604

考 生 姓 名:

考 生 编 号:

考生须知:

1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。

3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 二 大题，共 二 页。

一、（共 9 小题，每小题 10 分，共 90 分）

1．用 $\varepsilon - N$ 定义验证极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$.

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\,dt}{\int_0^{\tan x}\sin t\,dt}$.

3．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{2+\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}\right)$.

4．设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^1 f(x)\,dx=1$，且

$$f(x)+\int_0^x f(t)\,dt=0,$$

求 $f(x)$.

5．令 $f(x)=x\ln\left(\dfrac{1}{2}+x^2\right)$，证明存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f'(\xi)=0$.

6．计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

7．讨论幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^n-1\right)x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

8．计算曲线积分

$$\int_{AMB}\left[\varphi(y)e^x-my\right]dx+\left[\varphi'(y)e^x-m\right]dy,$$

其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AMB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线，且该路线与直线段 AB 围成已知大小为 S 的面积.

9．计算 4 维球体 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le 1$ 的体积.

二、（共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分）

1．设 f 和 g 为 $[a,b]$ 上的连续函数，证明：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

进一步，当且仅当 $f=kg$ 或 $g=kf$ (k**为某个实数**)时，上式中等号成立.

2．设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在 0、1 两点连续，且对任何 $x\in R$ 有 $f(x^2)=f(x)$，证明 $f(x)$ 为常量函数.

3．函数 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 区间上的拉格朗日中值公式为

$$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x,$$

其中 $0<\theta<1$，且 θ 是与 $f(x)$ 及 x 有关的量。请应用上述办法研究函数 $f(x)=\arctan x$，求当 $x\to 0^+$ 时 θ 的极限值.

4．设

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n\right)=1,$$

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

5．设三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

中系数 a_n,b_n 满足关系

$$\sup_n\left\{\left|n^3a_n\right|,\left|n^3b_n\right|\right\}\le M,$$

其中 M 为常数. 证明：上述三角级数收敛，且其和函数具有连续的导函数.