

中国计量学院 2011 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目名称: 数学分析

考试科目代码: 604

考 生 姓 名: _____

考 生 编 号: _____

考生须知:

- 1、所有答案必须写在**报考点提供的**答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。
- 2、答案必须写清题号，字迹要清楚，保持卷面清洁。
- 3、试卷、草稿纸必须随答题纸一起交回。

本试卷共 二 大题，共 二 页。

一、(共 9 小题, 每小题 10 分, 共 90 分)

1. 用 $\varepsilon-N$ 定义验证极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3^n} = 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i a_i}{n^2}$, 其中 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - \cos \frac{x}{2}}{(\sin x - \sin \frac{x}{2}) \ln(1+x)}$.

5. 若 $f(x)$ 满足 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x)dx$, 求 $f(x)$.

6. 设 $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$, $a > 0$ 为常数.

证明: $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续, 在 $(0, a)$ 上非一致连续.

7. 定出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 的收敛与一致收敛范围.

8. 求曲线积分

$$\int_{\Gamma_0} (e^x \sin y - y^2) dx + e^x \cos y dy$$

其中 Γ_0 为自 $A(a, 0)$ 到 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

9. 求曲面积分

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy.$$

其中 S 为锥面: $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq h)$ 的外侧.

二、(共 4 题, 每小题 15, 共 60 分)

1. 设 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界且有连续导函数, 并且

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 β 的范围, 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有如下性质:

(1) 连续性; (2) 可导性; (3) 导函数连续.

2. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

3. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

4. 设函数 $f(x, y)$ 可微, $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$, $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 且满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f\left(0, y + \frac{1}{n}\right)}{f(0, y)} \right)^n = e^{\cot y}$$

求 $f(x, y)$.