浙江师范大学 2004 年研究生

入 学 考 试 试 题

基础数学、应用数学、

考试科目：高等代数　　　　报考学科、专业：运筹学与控制论

一 填空题（50分）

1 如果复数 α 是实系数多项式 $f(x)$的m重根，那么共轭复数 $\overline{\alpha}$ 是f(x)的___重根

2 设A, B是$n(\geq 2)$阶矩阵，且 $|A|=-2$，$|B|=4$，则 $|2A^*B^{-1}|=$ _____ .

3 A是一个 $s\times n$ 矩阵，$AB=O$, 若秩(A) = r，则B的秩至多是 __________。

4 已知λ_0是线性变换$\mathscr{A}$ 的特征多项式 $|\lambda E-A|$的s重根，并且$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的线性无关的特征向量 个数是 r，那么 s与r的大小关系是 __________。

5 已知4阶矩阵 A的最小多项式是 $(\lambda-2)^2$，则A的若当标准形矩阵是 ______。

6 若3阶矩阵 A的三个特征值都是整数 ，其中一个特征值是 3，且 $|A|=-3$ 则迹 $tr(A^{100})=$ ___________.

7 复数矩阵的集合 $W=\left\{\begin{pmatrix} a_1+a_2i & a_3 \\ a_4 & a_5+a_6i\end{pmatrix} \middle| a_i\in R\right\}$关于矩阵的加法和数乘是实数域 R上的_________维线性空间。

8 若n阶实数矩阵 A是一个正交矩阵 ,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是A的n个行向量 .那么内积$(\alpha_i,\alpha_j)=$ ________ $(i\neq j)$.

9 使二次型 $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix}$的正惯性指数为 2的t 值是 ____。

10 使R^2成为欧氏空间的二元实 函数(α,β)是 ________

(1) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$　　(2) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$

(3) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$　　(4) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$

其中 $\alpha=(x_1,x_2)$, $\beta=(y_1,y_2)$.

二 (10分)设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$是线性空间 $P[x]_{n-1}$中次数 $\leq n-2$的多项式，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数域 P中的任意数，证明

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

三（10分）已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

求一个 3×3 矩阵 $B \neq O$, 使 $BA = O$;

四（10分）判别多项式 $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 在有理数域上的不可约性。

五（15分）已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求一可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 是一个对角矩阵。

六（15分）若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，证明 $A - E$ 也有 n 个不同的特征值。

七（15分）设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 $s\times m$ 矩阵，$B_1, B_2, \cdots, B_m$ 是 B 的 m 个列向量。证明：如果秩 $(A, B_i) =$ 秩(A), $i = 1, 2, \cdots, m$, 那么秩 $(A, B) =$ 秩(A).

八（15分）设 $A \in P^{n\times n}$、

(1) 证明 $W = \{B \in P^{n\times n} \mid AB = O\}$ 和 $U = \{AB \mid B \in P^{n\times n}\}$ 都是 $P^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 若 秩$(A) = r$, 求 W 和 U 的维数。

九（10分）设 A 是 $n\times n$ 实数矩阵，β 是 n 维实数列向量，证明线 性方程组 $AX = \beta$ 有解当且仅当 β 与齐次线性方程组 $A'X = O$ 的解空间正交。