



浙江师范大学 2004 年研究生 入学 考 试 试 题

课程与教学论、基础数学

考试科目：数学分析 报考学科、专业：应用数学、运筹学与控制论

一、(40 分，每题 5 分) 求以下极限和积分：

- 1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a^2} - \sqrt{x-b^2}}$,
- 2、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n} - 1}$,
- 3、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right\}$,
- 4、 $\int_0^1 x^2 (\ln x)^2 dx$,
- 5、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg} x^2}$,
- 6、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}$,
- 7、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, ($a_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$)
- 8、 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$

二、(20 分) 求出极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^n dx \quad \text{和} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} nx^n dx$$

并指出积分和极限不能交换的原因。

三、(20 分) 求二重积分

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\sin(x-y)| dx dy$$

四、(20 分) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，证明

- 1、若对 I 中一切有理数 r 有 $f(r) = c$ ，则在 I 上 $f(x) \equiv c$ 。
- 2、若对 I 中任意两个有理数 $r_1 < r_2$ ，有 $f(r_1) < f(r_2)$ ，则 $f(x)$ 在 I 上严格递增。



浙江师范大学 2004 年研究生 入学 考 试 试 题

课程与教学论、基础数学

考试科目：数学分析 报考学科、专业：应用数学、运筹学与控制论

五、(20 分) 记 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, 证明: $f(x)$ 在 $(1, \infty)$ 上有连续的

导函数, 进一步证明 $f(x)$ 在 $(1, \infty)$ 上有各阶导数。

六、(15 分) $f(x, y)$ 在 $[0, 1; 0, 1]$ 上有界, 在 $y = x$ 间断, 其余 (x, y)

各点二元连续, $F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy,$

问 $F(x)$ 是否为 $[0, 1]$ 上连续函数, 证明你的判断。

七、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上可导,

且 $f(0) = 0, 0 \leq f'(x) \leq f(x)$, 证明 $f(x) \equiv 0, x \in (0, \infty)$ 。