浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目：高等数学　　　　报考学科、专业：理论物理、光学

考生注意：(1)请在答题纸上答题，答在别处无效
(2)本试卷共十一大题，满分 150 分

一、填空题(本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分)

(1)设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 $a=$________，$b=$________.

(2)求 $y=\dfrac{x}{\arctan x}$ 的间断点________，类型________.

(3)求 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的全微分________和切平面方程________.

(4)已知 $f(x)=e^x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=$________.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}=$________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=$________.

(7)求方程 $y''-y'=e^x$ 的通解________.

(8)已知 $\vec{a}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$，求 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a})=$________.

(9)已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$________.

(10)平面板由 $y=x^2$，$y=4$，$x=0$ 所围成，其面密度 u 为常数，则平面板的重心坐标 $x_0=$________，$y_0=$________.

二、计算(本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分)

(1) $\int\sin(\ln x)\,dx$；

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

三、(8 分) 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 所确定,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

四、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(10 分) 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t) f(t) dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(10 分) 将函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2} (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成正弦级数,并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}.$$

七、(15 分) 求二元函数 $z = f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值,最大值和最小值.

八、(10 分) 计算曲面积分 $\iint_S (2x + z) dydz + zdxdy$,其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$,其法向量与 z 轴正向夹角为锐角.

九、(8 分) 求 $I = \int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2 \sin y) dy$,其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的那一段.

十、(15 分) 设矩阵 A 与 B 相似,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(1) 求 a 和 b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = B$.

十一、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.试证在 $(0,1)$ 内存在不相等的两个数 ξ, η,使 $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{2}{f'(\eta)} = 3$.