浙江师范大学 2005 年研究生

入 学 考 试 试 题

考试科目：数学分析与高等代数　　　报考学科、专业：课程与教学论

一、求下列极限（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\tan x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$

二、证明以下不等式（每小题 10 分，共 20 分）

1. $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$

2. $\ln(1+n)<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<1+\ln n$

三、利用幂级数的性质求以下无穷级数的和（每小题 10 分，共 20 分）

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n, x\in(-1,1)$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$

四、求由抛物线 $y^2=x$ 与直线 $x-2y-3=0$ 所围平面图形的面积（10 分）。

五、要制造一个容积为 a 立方米的无盖长方形水箱，问这个水箱的长、宽、高各为多少米时，用料最省？（10 分）

浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目：数学分析与高等代数　**报考学科、专业：课程与教学论**

高等代数部分

一、(**本题 10 分**)设有理系数多项式 $f(x)=x^4+5x^3+6\frac{1}{4}x^2+3x+\frac{1}{2}$，那么

(1) 求 $f(x)$ 有理根的所有可能，且求出 $f(x)$ 的所有有理根；

(2) 将多项式 $f(x)$ 在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上分解成若干个不可约多项式的积，并说明你所给出的每一个因式都是 $\boldsymbol{Q}$ 上的不可约多项式。

二、(**本题 10 分**)计算下列行列式：

(1) $d=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$；　(2) $d_n=\begin{vmatrix} 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} \\ 1+a_n & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$。

三、(**本题 12 分**)设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3+x_4=0, \\ x_1+ax_2+x_3+x_4=1, \\ ax_1+x_2+x_3+x_4=1, \end{cases}$$

(1) 试判断：当 a 取什么值时，方程组无解；当 a 取什么值时，方程组有解；

(2) 在方程组有解时，求解此线性方程组，且给出方程组解的一般形式。

浙江师范大学 2005 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目：数学分析与高等代数 **报考学科、专业：课程与教学论**

四、(**本题 10 分**)设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 n 维线性空间 V 中的两个向量组，

(1) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，且 $t<s$，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关；

(2) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 的秩为 $r+1$。

五、(**本题 12 分**)设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 是的三维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

(1) 求线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ 下矩阵；

(2) 求线性变换的特征值与特征向量；

(3) 求可逆矩阵 T，使得 $T^{-1}AT=D$，其中 D 为对角矩阵。

六、(**本题 6 分**)设 η 是欧氏空间 V 中的一个单位向量，定义 V 的线性变换

$$\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta,$$

证明线性变换 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换，且 $\mathcal{A}$ 有且只有两个不同的特征值 1 与 -1。