浙江师范大学 2006 年研究生
入学考试试题

考试科目： 363 数学分析　**报考学科、专业：** 应用数学、运筹与控制论、基础数学

一 （每小题 5 分，共 30 分）**概念题**

1、给出函数列$\{f_n(x)\}$在集合 I 上不一致收敛于$f(x)$的$\varepsilon-N$定义.

2、给出微分的几何解释.

3、给出数量场的梯度以及向量场的散度的定义.

4、叙述有限覆盖定理.

5、给出可度量化几何体Ω上函数f的黎曼积分$\int_\Omega f d\Omega$的定义.

6、按$\varepsilon-\delta$定义证明

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-3}}=\sqrt{7}$$

二 （每小题 6 分，共 30 分）计算题

1、求$\int_0^\pi \sqrt{\sin\theta-\sin^3\theta}\,d\theta$的值.

2、求$\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$的值.

3、设$f(x,y,z)=x^{y^z}$，其中$x>0,\ y>0,\ z>0$，求f_x, f_y和f_z.

4、求积分$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} xdx+y^2dy-z^3dz$的值.

5、求下列极限值

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^2}\right)$$

三 （8 分）设a_k和b_k均为任意实数（$k=1,2,\cdots,n$）. 试证如下的 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^n a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k{}^2\right)$$

并且式中等号当且仅当a_k/b_k为一常数时适用（如果$b_k\ne 0$）.

四 （10 分）试证当 $0<\theta<2\pi$ 时，

1、 $\lim\limits_{r\to 1^-}(\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta)=0$

2、 $\lim\limits_{r\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$

五 （12 分）试将 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ 分别用直角坐标，柱面坐标和球面坐标表示为一个逐次积分，其中 V 是由 $x^2+y^2=R^2$， $z=0$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

六 （20 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 试证：如果 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 都存在且有限， 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 反之成立吗？若成立，试证之，否则，请举出反例.

七（20 分） 证明：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可微函数， 且当 $x\ge a$ 时，$|f'(x)|\le g'(x)$，则当 $x\ge a$ 时有

$$|f(x)-f(a)|\le g(x)-g(a)$$

八、（20 分） 试证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛和一致收敛，但由其各项绝对值所组成的级数在 $[0,1]$ 上却不一致收敛.