浙江师范大学 2006 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目： 数学分析与高等代数 **报考学科、专业：** 课程与教学论（数学教育学）

数 学 分 析 部 分

一、求下列极限（每小题 5 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$， 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\tan x}$，

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$， 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$，

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$， 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$。

二、证明以下不等式（每小题 10 分，共 20 分）

1. $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$，

2. $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$。

三、利用幂级数的性质求以下无穷级数的和（每小题 10 分，共 20 分）

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n,\ x\in(-1,1)$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

四、设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，$a$ 为实数. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$。

(10 分)

五、要制造一个容积为 a 立方米的无盖长方形水箱，问这个水箱的长、宽、高各为多少米时，用料最省？（ 10 分）

浙江师范大学 2006 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目： 数学分析与高等代数 **报考学科、专业：** 课程与教学论（数学教育学）

高 等 代 数 部 分

六、计算下列行列式（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\begin{vmatrix} a+x_1 & b & c & d \\ a & b+x_2 & c & d \\ a & b & c+x_3 & d \\ a & b & c & d+x_4 \end{vmatrix}$， **2.** $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -b & a & b & b \\ -b & -b & a & b \\ -b & -b & -b & a \end{vmatrix}$。

七、当 a，b 取何值时，下列方程组有解，在有解的情况下，求解此线性方程组，并写出方程组的一般解（12 分）

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + ax_4 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - x_4 = b. \end{cases}$$

八、设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

当 a 取何值时，矩阵 A 可逆，在可逆的情况下求 A 的逆矩阵。

（10 分）

浙江师范大学 2006 年研究生
入 学 考 试 试 题

考试科目： 数学分析与高等代数 **报考学科、专业：** 课程与教学论（数学教育学）

九、设ε_1，ε_2，ε_3是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的三维空间 $\boldsymbol{Q}^3$ 的一组基，如果 $\boldsymbol{Q}^3$ 的一个线性变换 $\boldsymbol{A}$，满足:

$$\boldsymbol{A}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3) = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

(1) 求线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上的特征值与特征向量;（8 分）

(2) 分别求线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的值域 $\boldsymbol{A}V$ 与核 $\boldsymbol{A}^{-1}(0)$的一组基。（8 分）

十、设 A 是一个实对称矩阵，在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义线性变换 $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\alpha = A\alpha, \qquad \forall\,\alpha \in \boldsymbol{R}^n,$$

证明: $\boldsymbol{R}^n$ 可以分解成 n 个一维 $\boldsymbol{A}$-子空间的直和，即

$$\boldsymbol{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

而且这些一维 $\boldsymbol{A}$-子空间 V_i（$i = 1，2，\cdots，n$）两两正交。

（10 分）