

浙江师范大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 481

科目名称: 高等代数

提示:

- 1、本科目适用专业: 070101 基础数学、070102 计算数学、070104 应用数学、070105 运筹学与控制论、071101 系统理论;
- 2、请将所有答案写于答题纸上, 写在试题上的不给分;
- 3、请填写准考证号后 6 位: _____.

一、填空题 (每小题 5 分, 满分共 50 分)

1. 设 3 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $B = [\beta, \alpha_2, \alpha_3]$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为 3 维列向量, 已知 $|A| = 2$, $|B| = 2$, 则 $|A + B| =$ _____.

2. 设 $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, 则 $(A'B)^k =$ _____, 其中 k 为给定的自然数.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & a & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} =$ _____. 其中 A_{3j} 是元素 a_{3j} 的

代数余子式.

4. 设向量组 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 也线性无关, 且 α_i, β_j ($i=1, 2, j=1, 2$) 相互正交, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ _____ (填线性无关或线性相关).

5. 设 n 阶矩阵 A 的特征值是 $1, 2, 3, \dots, n$, 则 $|A + E_n| =$ _____.

6. 数域 P 上的线性空间 V 的一个变换 σ 称为线性线性, 如果满足: _____.

7. 设 $f(x), g(x)$ 是 $P[x]$ 中的两个多项式, $P[x]$ 中的多项式 $d(x)$ 称为 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式, 如果它满足条件_____.

8. 设 λ 是 n 级矩阵 A 的一个特征值, 矩阵 $aA + bE$ 必有特征值_____.

9. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 则 A 为正定矩阵的充分必要条件是_____.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的解, 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 也是 $Ax = \beta$ 的解, 则 $k_1 + k_2 + \dots + k_s =$ _____.

二、(满分 10 分) 计算下列行列式

$$d = \begin{vmatrix} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \frac{\alpha + \beta}{2} & \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \frac{\beta - \gamma}{2} & \sin \frac{\beta + \gamma}{2} & \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} & \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} & \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \end{vmatrix}$$

三 (满分 10 分) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 是整系数多项式. 证明: 如果 $(x^2 + x + 1) \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$, 那么 $(x - 1) \mid f_1(x)$, $(x - 1) \mid f_2(x)$.

四 (满分 15 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基, 已知线性变换 ψ 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(1) 求线性变换 ψ 的秩;

(2) 求线性变换 ψ 的核与值域。

五(满分 10 分) 设 n 级正交矩阵 A, B 满足 $\frac{|A|}{|B|} = -1$, 证明 $|A+B|=0$ 。

六(满分 15 分) 设有三维列向量 $\alpha_1 = (1+\lambda, 1, 1)'$, $\alpha_2 = (1, 1+\lambda, 1)'$, $\alpha_3 = (1, 1, 1+\lambda)'$, $\beta = (0, \lambda, \lambda^2)'$ 。

问 λ 取何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表达式惟一;

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表达式不惟一;

(3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。

七(满分 10 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的系数矩阵为 A , 若 $|A| < 0$, 证明: 必存在一组实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 使 $f(a_1, a_2, \dots, a_n) < 0$ 。

八(满分 15 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ a+5 & -a-2 & 2a \end{bmatrix}$, 问 A 在什么条件下可对角化?

在什么条件下不可对角化?

九(满分 15 分) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量依次为: $\xi_1 = (1, -1, 0)'$, $\xi_2 = (1, -1, 1)'$, $\xi_3 = (0, 1, -1)'$, 求矩阵 A 。